

*con rispetto affettuoso
L'autore.*

MARIO NOVARO

Berlino Leningst. 28

IL CONCETTO DI INFINITO

E

IL PROBLEMA COSMOLOGICO



ROMA

TIP. DELLE TERME DIOCLEZIANE DI G. BALBI
Via della Mercede, N. 28

1895

Estratto dalla *Rivista Italiana di Filosofia*
Roma, Luglio-Agosto, 1895.

Il concetto di infinito e il problema cosmologico

I.

1. Se il concetto di infinito è stato dal sorgere della filosofia e della scienza, uno degli oggetti più costanti delle menti, il progresso verso una definitiva soluzione scientifica delle difficoltà che esso presenta non fu tuttavia che straordinariamente lento. A ciò à soprattutto contribuito il rilegare, come a priori, l'infinito fuori del campo appunto della conoscenza scientifica. Poichè quando si ammette senz'altro che, essendo l'intelletto umano finito non si può pretendere ch'esso arrivi a comprendere l'infinito (1), s'è già troncata la questione senza neanche averla posta, s'è lasciato intatto il mistero che sembra involgerla. Già tutti i concetti che in qualche modo ebbero una stretta attinenza con altri concetti teologici dovettero per questo attendere a lungo prima di venir trattati in modo veramente scientifico. La oscurità miste-

(1) V. Hobbes, *De corpore*, cap. XXVI, 1; Descartes, *Principien*, ediz. Kirchmann, p. 12, 14, 66; Galilei, *Opere* (Milano, 1811) X, 350-51; Locke, *Essay on human understanding*, ediz. Ward, World Library, pag. 152; Hume, *Treatise*, ediz. Selby-Bigge, 26, 32, 39, 43; cfr. anche Jevons, *Principles of science*, 2^a ediz. pag. 766-768.

riosa del concetto di infinito si ripercorse naturalmente negli oggetti nei quali esso poteva trovare applicazione, come il tempo, lo spazio, la materia, l'universo, l'essere. Anzi si cominciò dapprima ad accorgersi delle difficoltà della nozione di infinito non così in astratto, ma nell'esame degli oggetti ai quali la infinitezza pareva doversi attribuire.

Tanti secoli prima della ripresa della questione per Locke, trattarono il problema con sommo acume dialettico gli Eleati (1). Le difficoltà che condussero Zenone a negare la realtà dello spazio non sono punto illusorie (2). Nè altre furono quelle che spinsero poi Kant ai risultati della estetica trascendentale. Sebbene più d'uno storico della filosofia davanti ai tropi di quell'acutissimo filosofo sentendo l'imbarazzo suo a confutarli, abbia stimato poterli chiamare sofismi o false sottigliezze che chi le esaminasse da vicino e colla necessaria acutezza non dovrebbe tardare a riconoscere evidentemente per tali. E più d'uno nel confutarli a seguito, come lo Zeller, Aristotele (3) che in questo se in altro mai fu infelicissimo.

(1) Sugli Eleati e la loro importanza, vedi specialmente la *Kritische Geschichte der Philosophie* del Dühring, 3^a ediz. p. 34-51.

(2) Cantor, *Geschichte der Mathematik*, I, 170: "Bei ihnen (i tropi degli Eleati) handelt es sich um Schwierigkeiten, denen in der That weder der Philosoph noch der Mathematiker in aller Strenge gerecht werden Kann. . . . Zwei Jahrtausend und mehr haben an dieser zähen Speise gekaut, und es wäre unbillig von den Griechen des fünften vorchristlichen Jahrhunderts zu verlangen, dass sie in Klarheit gewesen seien über Dinge, welche freilich anders ausgesprochen noch Streitigkeiten unserer Gegenwart bilden. "

(3) *Phys.*, VI, 9. Aristotele crede di confutare Zenone (V. anche O. Apelt, *Beiträge zur Geschichte der Griechischen Philosophie*, Leipzig, 1891, p. 275) col dire che la dimostrazione da lui data riposa sulla falsa

I matematici, i quali spaventati dalle contraddizioni svelate dagli Eleati avevano dovuto per forza rinunciare a far uso del concetto di infinito e lasciar tanto tempo infruttuoso l'ardimento di Antifonte (1), continuarono a lungo ad aiutarsi altrimenti per non derogare alla rigorosa esattezza delle loro dimostrazioni (2). Così l'idea di infinito non compare mai esplicitamente nella geometria antica. E Archimede ebbe seguaci anche dopo che il calcolo infinitesimale ebbe chiaramente mostrati i suoi così fecondi vantaggi. Ragione principale di ciò fu il non avere l'autore stesso del concetto tecnico dell'infinitesimo, saputo mai nè pienamente giustificarlo, nè dargli un significato preciso, sì che egli molte volte ebbe a espi-

supposizione che il tempo consti di singoli momenti (ἐκ τῶν ἀδιαιρέτων) come se la critica di Zenone non valesse indifferentemente tanto per il continuo dello spazio che per quello del tempo istesso. Cfr. Cantor, *id.*, 173: "Er (Aristotele) löst das Paradoxon der Durchlaufung dieser unendlich vielen Raumpunkte in endlicher Zeit, durch das neue Paradoxon, dass innerhalb der endlichen Zeit unendlich viele Zeittheile von unendlich Kleiner Dauer anzunehmen seien." — Sul concetto di infinito in Aristotele vedi specialmente *Phys.*, III, 4-7, *De Coelo*, I, 5. Aristotele dà una divisione dei vari generi di infinito, che come sempre o spessissimo presso lui è più una spiegazione di parole che di concetti. Inoltre è la sua trattazione oscura e affatto manchevole. Egli non accetta che l'infinito potenziale, il quale nasce dal non trovar la nostra immaginazione alcun limite così nel togliere come nell'aggiungere; rifiuta l'infinito attuale. L'infinito, dice egli, non è grandezza nè à parti così, come il suono è per sè invisibile (*Phys.*, III, 4). Non esiste dunque in realtà, perchè non v'è grandezza cui possa attribuirsi. Ma la contraddizione ch'egli crede dover evitare rigettando il concetto dell'infinito attuale è appunto nascosta invece in quello del continuo. Altrimenti egli non avrebbe così leggermente creduto di aver superate le difficoltà degli Eleati.

(1) Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*. Paris, 1831, p. 44.

(2) Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, p. 120.

mersi sulla sua nozione in modo affatto contraddittorio (1). E se i filosofi non riuscirono a chiarire i loro concetti riguardanti l'infinito trascurando la maggior parte di aiutarsi con un esame accurato dalle difficoltà che incontravano anche i matematici, questi dal canto loro si sono del pari in gran parte appagati dei risultati, senza sentire troppo acuto il bisogno di rendersi conto esatto del significato di concetti dei quali avevano a fare un continuo uso (2). Che anzi per le difficoltà, oscurità o contraddizioni dell'infinito tranquillamente si rimettevano

(1) Leibniz, anche quando si esprime più razionalmente intorno ai concetti infinitesimali, conserva pur sempre in fondo una evidente ambiguità sulla natura generale del concetto di infinito. Lascia infatti alla metafisica, senza risolverla egli stesso, la questione se si diano propriamente degli infinitamente piccoli rigorosi; e così tiene pure per indifferente considerare per tali gli infinitesimi o soltanto per arbitrariamente piccoli. Negli ultimi anni (dopo il 700) egli inclina però più a tenere l'infinito rigoroso per una finzione. V. Leibniz, *Opera omnia*, ediz. Dutens I, 107 e Leibniz, *Mathematische Schriften*, Gerhardt IV, 110 e V, 389, dove Leibniz pare considerare gli infinitesimi come quantità finite variabili e cfr. Gerhardt II, 288; IV, 93; V, 322; VII, 68 e 273; Erdmann 118, 126, 184, dove egli parrebbe ammettere l'infinitesimo attuale. In altri luoghi egli è affatto incerto; ed. Dutens II, 267-68; Gerhardt, III, 81, 499, 516; IV, 63 e vedi specialmente un passo ivi p. 91-92.

(2) Infatti un secolo circa dopo l'adottamento del calcolo, nel 1784, una delle prime accademie d'Europa, quella di Berlino, presieduta da uno dei più grandi matematici, da Lagrange, apriva un concorso sul concetto dell'infinito matematico; diceva tra altro ai concorrenti... "On demande... une théorie claire et précise de ce qu'on appelle *Infini* en mathématique. On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géomètres et même les analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini, et des grands Analystes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* sont contradictoires. L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire...". *Nouveaux Mémoires de l'Acad. des Sciences*. Berlin 1786, p. 12-13.

come molti si rimettono tuttora, ai metafisici (1). L'unico filosofo dal quale si sarebbe potuto aspettare qualche dilucidazione definitiva, il Comte, il quale era tanto versato nelle matematiche e che di esse à dato una così bella e tuttora insuperata sistematica trattazion generale, non solo non fece fare un passo alla questione, ma neppure seppe bastantemente apprezzare i grandi meriti del lavoro del Carnot, il quale preparava la soluzione definitiva. Solo Locke e Kant sono così i filosofi che fecero verso di essa un passo decisivo: Kant però si direbbe che lo fece in senso reazionario, chè se Locke avesse decisamente cangiato il suo metodo empirico e psicologico con un metodo critico, come egli in realtà è qualche volta inconsapevolmente vicino a fare, avrebbe egli stesso colto l'ultimo frutto della sua fine analisi. Ad ogni modo è merito di Locke, oltre aver risolto l'infinitamente piccolo e grande nel processo formale della mente, l'aver dimostrato come un tale concetto sia solo propriamente applicabile a grandezze, al numero, al tempo ed allo spazio. Con ciò ogni nebuloso abuso scolastico e metafisico di esso, era reso impossibile, e ogni sua applicazione ad altro che a concetti di grandezze diventava una pura metafora (2).

Rifacendosi da Locke e approfittando della luce che il Carnot aveva gettato sulla natura dell'infinitesimo, il Dühring à finalmente completata la razionalizzazione di

(1) V. Leibniz, passo citato, Gerhardt IV 91-92 e Montucla, *Histoire des mathématiques* III, 119: quanto alle questioni che la metafisica può sollevare sulla natura dell'infinito, il matematico "à droit de ne s'en pas plus embarasser que des disputes des physiciens sur la nature de l'étendue et du mouvement."

(2) Locke, *On human Underst.*, cap. XVII, 1 e 6, p. 147.

questo concetto (1). L'infinito assoluto aveva però il Dühring costantemente rifiutato come la più assurda contraddizione, in tutti i suoi scritti matematici e filosofici. Soltanto nell'ultima sua opera matematica arrivò egli ad una luminosa distinzione dell'infinito assoluto dal relativo. La sua dimostrazione è però unicamente geometrica, e non insieme aritmetica; manca quindi di generalità. Così si spiega come egli ritenga ancor ora inammissibile l'applicazione dell'infinito al tempo, che egli à assurdamente e colla più gran forza di convinzione fatto finito nel passato (2). Il Dühring vide che ove il concetto di infinito non venisse dapprima reso chiaro e incontraddittorio nella matematica, la ròcca in apparenza più forte rimarrebbe in piedi a difesa del mistificante concetto. La nozione di infinito non è però specificamente matematica; essa appartiene a quel campo del pensiero, in cui ànno comuni le radici o i principî e la matematica e la logica. La soluzione di un problema così universale non può esser diversa, ove esso venga formulato con la dovuta astrazione ed esattezza, sia che la si cerchi nel campo della metafisica o della concezione universale dell'essere, sia che la si cerchi nel puro campo della matematica. Non

(1) V. *Natürliche Dialektik* (1865), questo libro d'oro di puro criticismo, la cui prima edizione è esaurita da molti anni senza che il Dühring si decida a ripubblicarlo, malgrado il vivo desiderio di molti suoi ammiratori, quali per un esempio il v. Gizicky e il Riehl. Vedi specialmente dello stesso, nei " *Neue Grundmitteln u. Erfindungen zur Analysis*, ecc. ", il capitolo terzo. L'analisi critica dell'infinitesimo ivi data riassumiamo noi brevemente nel numero seguente, modificandola però nel senso della corretta legge del numero determinato. V. sotto.

(2) *Cursus der Philosophie*, p. 18, 19, 27, 64; *Logik und Wissenschaftstheorie*, 191 segg.

è un differente problema quello di Zenone di Elea, da quello che occupò a così grande distanza di tempo i matematici dal seicento in poi.

2. In tutti i problemi filosofici o matematici riguardanti il concetto di infinito, le difficoltà hanno la loro comune radice nella contraddizione fondamentale nascente dalla posizione di un infinito numericamente dato e compiuto nel finito stesso. Così l'infinitesimo, e già prima l'indivisibile di Cavalieri, fu pensato assurdamente quale risultato di una infinita divisione, o come l'elemento più piccolo d'ogni grandezza assegnabile, di cui si integra ogni grandezza finita. Più piccolo di qualunque quantità data fu pensato l'infinitamente piccolo, e maggior d'ogni data grandezza l'infinitamente grande, arrivando anche qui ad una infinità compiuta, come raggiungibile per via di una sintesi successiva. Tra lo zero e una comunque piccola grandezza dovrebbe dunque esistere qualcosa di intermedio. Questa ibrida quantità non dovrebbe esser zero ma neppure però una determinata quantità per quanto arbitrariamente piccola. Essa dovrebbe esser minore d'ogni quantità assegnabile o qualcosa che esprima l'ultimo irraggiungibile grado di piccolezza immaginabile e prima dello zero (1). Minore d'ogni quantità assegna-

(1) Modificando la nozione galileiana del momento, già Hobbes definisce il *conatus* (concetto che doveva poi diventare il fondamento della teoria newtoniana), il moto lungo uno spazio minore di qualsiasi assegnato. Egli conserva, però, malgrado l'equivoca definizione, come dell'infinitamente grande (*De Corpore*, c. VII, 11, 12 e 13) così dell'infinitesimo un giusto concetto. Di quest'ultimo aveva intesa infatti la essenziale relatività. V. *De Corpore*, c. VII, 13; e c. XV, 2: "Definiemus *Conatum* esse motum per spatium et tempus minus quam quam

bile è però soltanto lo zero (1); una quantità non può venir immaginata oltre ogni assegnabile grandezza; tra la quantità e lo zero non vi è cotesta assurda finzione. A meno che il dire: « minor d'ogni data quantità » abbia

quod datur, id est determinatur, sine expositione vel numero assignatur, id est per punctum. Ad eius definitionis explicationem meminisse oportet per punctum non intelligi id quod quantitatem nullam habet, sive quod nulla ratione potest dividi (nihil enim est eiusmodi in rerum natura), sed *id cuius quantitas non consideratur*, hoc est cuius neque quantitas neque pars ulla inter demonstrandum computatur; ita ut punctum non habeatur pro indivisibili; sed pro indiviso. Sicut etiam instans sumendum est pro tempore indiviso non pro indivisibili. — Similiter *Conatus* ita intelligendus est, ut sit quidem motus sed ita ut neque tempori in quo fit, neque lineæ per quam fit quantitas, ullam comparationem habeat in demonstratione cum quantitate temporis vel lineæ cuius ipsa est pars; quanquam sicut punctum cum puncto, ita *conatus* cum *Conatu* comparari potest, et unus altero maior vel minor reperiri. » Vedi anche c. XXVII, 1. — Il Poisson, tra' moderni, ammetteva invece nel modo più esplicito l'assurdo concetto dell'infinitesimo di cui sopra è parola. Egli dice: " Un infiniment petit est une grandeur moindre que toute grandeur donnée de la même nature. On est conduit naturellement à l'idée des infiniment petits, lorsqu'on considère les variations successives d'une grandeur soumise à la loi de continuité. Ainsi, le temps croît par des degrés moindres qu'aucun intervalle qu'on puisse assigner, quelque petit qu'il soit. Les espaces parcourus par les différents points d'un corps croissent aussi par des infiniment petits, car chaque point ne peut aller d'une position à une autre, sans traverser tous les positions intermédiaires, et l'on ne saurait assigner aucune distance, aussi petite qu'on voudra, entre deux positions successives. Les infiniment petits ont donc une existence réelle, et ne sont pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres. » *Traité de mécanique*, Bruxelles, '38, p. 6-7.

(1) Per questa ragione non pochi matematici, quali Jacopo Bernoulli e notoriamente Eulero, pensarono l'infinitesimo come assolutamente nullo. Anche Galileo, sebbene con altro linguaggio, scompone il continuo esteso in infiniti punti inestesi o nulli senza però trovar poi il modo di farlo generare da quelli. V. Galilei, *Opere*, X, 350-351. Sopra gli atomi non quanti di lui vedi Lasswitz, *Galilei's Theorie der Materie*, *Vierteljahrsschrift f. wiss. Philosop.* XIII, 1889.

a riferirsi non a qualcosa di effettivo o di dato, ma alla nostra mente o al nostro volere come ragione della infinita divisibilità, potendo noi sempre supporre una quantità più piccola di ogni qualunque piccola quantità data. Come nella serie dei numeri noi possiamo farci un concetto dell'infinito aggiungimento di unità a unità, così possiamo farcene uno della possibile divisione dell'unità all'infinito. Un tal concetto non rimane tuttavia che il campo d'una operazione che non può per la sua natura venir mai compiuta. La infinita divisione come la infinita addizione non possono mai senza contraddizione considerarsi come eseguite. Non si può con un salto oltrepassare un'infinità di operazioni, ponendo l'ultima come già compiuta, che invece non può mai essere. Ciò che esiste o è dato numericamente *quale totalità* non può esser che in numero determinato (1). Un numero infinito come qualcosa di dato o compiuto nel finito medesimo è un concetto impossibile perchè vorrebbe porre ciò che insieme viene a negare. Ammesso dunque che abbia a dirsi di una quantità che essa è minore d'ogni possibile quantità data, ciò potrà solo razionalmente significare che è pur sempre possibile suppor quella come ancor più pic-

(1) È questa la legge formulata dal Dühring nelle varie sue opere filosofiche e matematiche sotto il nome di legge del numero determinato (Gesetz der bestimmten Anzahl). Cfr. Kant: *Kritik d. reinen Vern.* edizione Kirchmann pag. 432: "Sobald etwas als *quantum discretum* angenommen wird, so ist die Menge der Einheiten darin bestimmt, daher auch jederzeit einer Zahl gleich. „ Il Dühring però, e qui sta il grave errore della sua teoria dell'infinito, à tralasciato come il Kant di aggiungere che tale legge à valore appunto, come diciamo noi, solo in riguardo a grandezze che si lasciano concepire come totalità, ossia in riguardo a grandezze comprese tra limiti.

cola di una qualunque data comunque già piccola per sè. La illimitatezza riposa sul concetto della infinita possibilità della ripetizione, non è dunque un concetto di effettività, ma di mera possibilità.

Il moto non realizza come si crederebbe l'assurdità di una infinita divisione o di una infinità di parti nel finito. Moto non è che il concetto di ciò che la stessa cosa si trova seguentemente prima in un luogo e poi in un altro. I sensi non fanno che abbracciare un dato numero di posizioni diverse, e l'intelletto non trova altro che il fatto ossia la cambiata posizione. Noi non possiamo formarci nè pretendere altro chiaro concetto che quello del passaggio da un punto all'altro; possiamo solo, ove ce ne sia la ragione, interpolare delle posizioni intermedie a piacere senza limite alcuno; ma effettivamente nè la natura nè noi possiamo fissarne altro che un numero determinato. È una illusione il credere che un punto, ad esempio, nel muoversi in linea retta verso un altro punto fisso, e trascorrendo secondo il concetto comune di un movimento assolutamente continuo, per ogni posizione, trascorra con ciò effettivamente, se posso dir così, per ogni grado di piccolezza. La posizione di infiniti punti distinti in una determinata estensione è sempre e solo una possibilità ma non mai un fatto compiuto. Di due punti immediatamente aderenti noi non abbiamo assolutamente concetto alcuno. Punti inestesi o coincidono, o ànno una posizione diversa, e allora anche una determinata distanza. Il punto non può che passare da uno ad un altro punto, comunque noi idealmente possiamo astrarre da cotesti trapassi e considerare unicamente la

infinita possibilità di posizioni diverse. La stessa illusione è nel dire che una quantità cresce per gradi minori di ogni comunque piccola grandezza data. È vero che in matematica le quantità continue crescono per gradi e che ogni nuovo incremento elementare possiamo immaginarcelo già per sé stesso composto di ancor più piccoli incrementi elementari all'infinito. Ma oltre che nella realtà bisogna che esistano dei limiti a questa illimitatezza che è solo della facoltà della nostra mente, è anche vero che le quantità non constano di elementi per sé esistenti, e che invece noi solo distinguiamo in esse delle divisioni e stabiliamo dei limiti che per sé non sono dati. Il concetto di continuità ne involge uno infinitesimale che però include solo la possibilità di un infinito porre di limiti, ma non una infinità di limiti posti; esso è quindi come quello dell'infinitamente piccolo un concetto di pura possibilità.

La illimitatezza nella scomponibilità in parti che possono in ogni caso venir fatte ancora più piccole che una qualunque piccola grandezza data, è dunque ciò che di razionale s'è a sostituire al concetto nebuloso dell'infinitamente piccolo. Con ciò viene evitata quella ipostasi o per così dire insostanziazione di un modo di azione del nostro intelletto, o di una mera possibilità, la quale è inchiusa nel falso concetto della grandezza minore di ogni altra assegnabile, come di qualcosa realmente esistente quasi mèta irraggiungibile ma pur reale di una infinità di operazioni. Non esiste un ultimo piccolo o infinitesimo, ma solo una infinita possibilità di rimpicciolimento.

Si deve dunque pensare che il differenziale è nel calcolo una grandezza finita relativamente piccola, la quale nel complesso delle operazioni può e deve rappresentare ad arbitrio ogni grado di piccolezza. Si tratta per esempio, dice il Dühring, di una lunghezza; può questa, come infinitamente piccolo, essere secondo le circostanze un milionesimo di millimetro ovvero una distanza solare. L' essenziale non istà in queste eventuali determinazioni, ma nel pensiero che in luogo di quella grandezza, scelta in relazione a un tutto come parte insignificante, possano nelle operazioni sostituirsi altre ed altre senza limite alcuno sempre più piccole verso lo zero (1). L' infinito o la illimitatezza non è dunque ipostasiata nel differenziale, si bene sta nel nostro pensare che questa grandezza rappresenta qualunque grado di piccolezza oltre il suo. Razionalizzato così il concetto fondamentale del calcolo, non à più ragione quella ripugnanza che i migliori matematici hanno sempre sentito per quella oscura ipotesi o idea falsa, come la chiamava Lagrange (2), dell' infinitamente piccolo. L' analisi è dunque, dice il Dühring, un calcolo d' approssimazione, ma si noti bene non di semplice approssimazione, bensì di approssimazione infinita. I sensi trascurano nel piccolo le quantità insignificanti che loro non sono più percettibili, e se fatti più acuti procederebbero del pari in analoghe proporzioni; così fa il calcolo nel trascurare quantità che nelle

(1) V. Freycinet: *Étude sur la métaphysique du haut calcul*, 1860, p. 32. Cfr. Carnot: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, 4^a edizione, pagine 16, 17 e 18.

(2) Comte: *Cours de philosophie positive*, I, 263.

loro funzioni darebbero in ultimo per risultato una grandezza che per la sua ultima piccolezza non à importanza alcuna. Accanto a quantità finite si trascura nel risultato e con ragione, un infinitamente piccolo, poichè è nella sua natura di poter venire senza fine rimpicciolito verso lo zero (1).

3. Idealmente c'è dunque un abisso tra l'infinitesimo e lo zero; non quello ma questo è il limite dell' infinito rimpicciolimento, e prima dello zero non vi sono che quantità in realtà sempre finite, comunque possano secondo il bisogno venir supposte sempre più piccole verso di esso. D' altra parte nella direzione opposta dell' infinitamente grande si à analogamente a distinguere tra

(1) Non altro significava il luminoso concetto del Carnot delle equazioni imperfette. Tuttavia egli non arrivò a dar l'ultima chiarezza alla nozione dell'infinitesimo. Infatti non avrebbe altrimenti creduto vi fosse bisogno (per dimostrare come i risultati del calcolo in apparenza soltanto approssimativi, siano in realtà esatti) oltre che della considerazione dell'arbitrarietà del differenziale, anche di una dimostrazione della compensazione degli errori. Il Comte poi frantese affatto ciò che di veramente importante e duraturo conteneva lo scritto del Carnot, e ravvisò così il merito di lui appunto nella dimostrazione della compensazione degli errori (V. *Cours de philosophie positive*, I, 244 e 223), la teoria invece dell'arbitrarietà dell'infinitesimo la trovava più sottile che solida (id. 267). — Il concetto della rigida uguaglianza degli antichi venne definitivamente superato con Leibnitz e Newton. Ciò che però non venne schiarito e rimase oggetto di tutte le lunghe innumerevoli dispute a cui diede luogo il calcolo differenziale, fu un giusto concetto di ciò che avesse a significare la trascuranza, nelle equazioni, dell'infinitamente piccolo. Dopo Carnot la relatività del concetto del differenziale s'è sempre più fatta strada nelle menti dei matematici. Ma non basta questo a razionalizzare l'infinitesimo. Dove colla relatività di esso si ammette però ancora (v. ad es. Montucla: *Histoire des math.*, III, 264-65) che questo possa divenir minore d'ogni quantità assegnabile, s'è pur sempre lontani da una esatta concezione scientifica.

questo e l' infinito assoluto o transfinito (1). Qui come là si à una differenza qualitativa: nell' un caso si à ancora a fare con delle grandezze, nell' altro il concetto proprio di grandezza è scomparso.

Il non aver distinto questi due concetti non à forse meno contribuito della contraddizione di un infinito compiuto nel finito stesso, implicato nel falso concetto del differenziale e del continuo, a rendere così pieno di supposte insolubili difficoltà il problema di cui ci occupiamo. All'infinitamente piccolo risponde perfettamente l'infinitamente grande. Abbiamo qui un accrescimento senza fine come là un illimitato rimpicciolimento; in entrambi i casi ci è data la norma di un'operazione che non deve poter mai venir considerata come compiuta, poichè essa deve rispondere alla illimitata possibilità di ripetizione della nostra mente, con la quale dunque non c'è grandezza per quanto piccola o grande di cui non si possa sempre raggiungere un'altra ancora più piccola o grande. Attribuito ad una data grandezza il concetto di infinitamente grande non significherà quindi altro che essa, comunque già grande, può senza fine venir considerata ancor sempre più grande secondo il bisogno. In ogni caso non sarà però ella mai altro che finita; come la nostra sintesi benchè non abbia limite, pure in fatti non può

(1) Chiamo *infinito assoluto* o *transfinito*, a distinzione dell'*infinito relativo* (infinitamente piccolo o grande), ciò che il Dühring dice *ilimitato* (*Unbegrenzt*, II) e il Cantor, e dietro lui il Wundt e il Lasswitz chiamano appunto *transfinito* (ω). Del resto una volta riconosciute queste differenze essenziali, nulla impedisce di adoperare anche solo e indifferentemente la parola *infinito*, lasciando al contesto l'ulteriore specificazione.

mai esercitarsi che nel finito. Anche l'infinitamente grande è un concetto di mera possibilità e non mai di effettività; non è quindi propriamente applicabile ad alcuna grandezza determinata (1). La serie progressiva dei numeri nella sua illimitata addibilità è il più chiaro esempio dell'infinitamente grande. Noi non possiamo mai *arrivare* ad un ultimo membro delle serie, perchè la possibilità di aggiungerne altri riman sempre la medesima. È nella natura dell'infinitamente grande di non poter venir mai compiuto. La illimitatezza non è neppur qui data oggettivamente, ma sta invece in questo che la grandezza infinitamente grande può rappresentare ad arbitrio una grandezza sempre maggiore oltre la sua.

Inteso così è senz'altro chiaro che l'infinitamente grande non è un infinito in atto e non può senza contraddizione venir scambiato con questo. L'aver confuso l'infinito assoluto o transfinito coll'infinitamente grande è appunto la cagione che condusse chi mirava a un esatto

(1) Locke, *On hum. Underst.*, pag. 148. " ... our idea of infinity being, as I think, an endless growing idea, but the idea of any quantity the mind has being at that time terminated in that idea (for be it as great as it will, it can be no greater than it is), to join infinity to it, is to adjust a standing measure to a growing bulk. " — id., p. 150: " ... we can have no more the positive idea of a body infinitely little, than we have the idea of a body infinitely great; our idea of infinity being, as I may so say, a growing and fugitive idea, still in a boundless progression that can stop nowhere " — e p. 295-96: all our ideas of infinity... return at least to that of number always to be added; but thereby never amounts to any distinct idea of actual infinite parts. We have, it is true, a clear idea of division, as often as we will think of it; but thereby we have no more a clear idea of infinite parts in matter, than we have a clear idea of an infinite number, by being able still to add numbers to any assigned number we have:

e chiaro concetto di quest'ultimo a rifiutare risolutamente il primo, dopo averlo trovato incompatibile colla nozione di quello. Mentre l'infinitamente grande esprime una illimitata possibilità, il transfinito esprime invece una effettività compiuta cui l'infinitamente grande non arriva mai. Nel transfinito ogni grado di ingrandimento è già anticipatamente dato: esso è realmente maggiore di ogni assegnabile grandezza, e dal finito non c'è modo di farlo originare, sebbene ogni finito sia in esso. La facile obiezione che nessuna grandezza è la più grande perchè le possono sempre venir aggiunte altre unità, non tocca l'infinito assoluto, ma solo una irrazionale nozione dell'infinitamente grande, partendo ella da un falso concetto del transfinito, secondo il quale si avrebbe questo a lasciar pensare come un tutto, ossia, contrariamente all'assunto, come finito. Il concetto di totalità applicato al transfinito è trascendente, benchè tale non sia il transfinito per sè. Se l'infinito assoluto non può venir esaurito dalla nostra sintesi, non è questa una ragione per rifiutarne il concetto: la sua natura consiste infatti appunto in ciò di non poter venir rappresentato come una totalità ossia esaurito per mezzo di una sintesi successiva delle sue parti. Rifiutarlo perchè non si lascia trascorrere da un capo all'altro, è rifiutare il transfinito perchè appunto tale, ossia perchè non è finito, o perchè non si trovano

endless divisibility giving us no more a clear and distinct idea of actually infinite parts, than endless addibility, if I may so speak, gives us a clear and distinct idea of an actually infinite number: both being only in a power still of increasing the number, be it already as great as it will. „

in esso le proprietà che dal suo concetto sono precisamente escluse.

Mentre nell'infinitamente grande la nostra sintesi è quella che aggiunge membro a membro; nell'infinito assoluto troviamo noi sempre ogni ulteriore membro come già innanzi esistente prima che la nostra sintesi lo abbia raggiunto, indipendentemente da essa. È dato quindi così il numero infinito, se numero può questo ancora chiamarsi, che è in realtà la negazione di esso e con ciò di ogni determinazione nel grande. Il numero infinito non è più nè pari nè dispari, e neppur quindi aumentabile più, nè diminuibile. Esso è dunque qualcosa di affatto compiuto, al contrario dell'infinitamente grande che è in un continuo flusso; e sta a questo come all'infinitamente piccolo sta lo zero. Come nello zero non c'è più possibilità di rimpicciolimento, così non ce n'è più di ingrandimento nel transfinito. Questo è la negazione della grandezza misurata nel grande, e lo zero la negazione della grandezza in generale e con ciò della grandezza nella direzione dell'infinitamente piccolo (1). Lo zero come l'infinito assoluto sono non tanto quantitativamente quanto per qualità diversi da ogni altra grandezza. L'infinitamente piccolo e grande sono in un continuo flusso, lo zero e il transfinito sono invece forme fisse; il principio generativo dei primi non è applicabile ai secondi. Dall'infinitamente piccolo allo zero e dall'infinitamente grande all'infinito assoluto c'è, a dir proprio, un salto (2).

(1) V. Dühring: *Neue Grundmittel*, ecc., pag. 480.

(2) Lo zero e l'infinito assoluto si fanno dunque riscontro. Ed erra quindi il Lasswitz che nega esserci qualcosa di corrispondente a que-

Nel primo caso il passaggio sta non nel rimpicciolire all'infinito per successive divisioni la quantità piccola in modo che avanzi pur sempre un resto, ma nell'ultimo atto risolutivo col quale si sottrae interamente il resto stesso. Nell'un caso si riman sempre nel campo dell'infinitamente piccolo, nell'altro si salta propriamente dalla quantità al nulla di essa. Una quantità non viene mai esaurita col sottrarre ripetutamente anche all'infinito una nuova parte del sempre nuovo resto; bisogna togliere in una volta l'intero resto altrimenti si avrà una convergenza continua verso l'irraggiungibile zero, ma non mai propriamente lo zero. E solo in quest'ultimo caso sarebbe veramente esaurita la grandezza. Non bisogna prender per esauritione reale una infinita approssimazione. Ciò che matematicamente si chiama esauritione è solo tale fino ad un infinitamente piccolo; ma questo vien da essa lasciato inesaurito. La vera esauritione non à luogo che con un salto, ossia con un vero passaggio. La interpolabilità infinita di posizioni tra punto e punto non toglie che da posizione a posizione il passaggio debba rimanere. E come v'è un salto da un punto a un altro in una linea, così v'è da un punto al punto ultimo col quale la grandezza finisce. Solo col

st'ultimo. (Lasswitz: *Zum Problem der Continuität*, *Philosoph. Monatshefte* XXIV, pag 27); come pure è più erra il Wundt che crede cadere nel differenziale ogni differenza essenziale tra l'infinito e il transfinito. Wundt: *Kant's Kosmologische Antinomien u. das Problem der Unendlichkeit* *Philos. Studien* II, 527: (che) das Infinitesimalsymbol ebenso gut in Sinne einer unendlich zudenkenden Abnahme einer gegebenen Grösse, wie im Sinne des bereits vollzogenen Processes dieser Abnahme gedacht werden kann. Hier fällt nämlich ein wesentlicher Unterschied des Infiniten und Transfiniten völlig hinweg (!!).

passaggio allo zero si à però un risultato differente non tanto per quantità quanto per qualità dagli altri.

D'altra parte lo stesso risultato qualitativamente differente si à nel secondo caso del passaggio dall'infinitamente grande al transfinito. Praticamente si può concludere è vero dal caso dell'incontro di due rette a distanza infinitamente grande al caso delle parallele, in quanto si astrae dallo sbaglio infinitamente piccolo, e si pone come identico il risultato solo infinitamente approssimativo. In realtà però mentre il punto d'incontro si allontana infinitamente all'avvicinarsi delle due rette al parallelismo senza raggiungerlo, raggiunto che questo sia, esso è scomparso, essendo per sè la infinita estensione della linea la negazione della possibilità d'un punto d'incontro, poichè questo le farebbe finite; ed à luogo allora quella illimitatezza od infinità assoluta della retta, la quale è la negazione della grandezza misurata nel grande, come lo zero è la negazione della grandezza in generale (1).

Un indubitabile significato reale si lascia dare al transfinito, come vedremo in sèguito soltanto nella serie infinita dei processi del tempo passato. Il nostro regresso che assume qui la forma dell'infinitamente grande, procede in base al transfinito della realtà, poichè esso trova e suppone necessariamente come dati sempre più membri della serie di quelli che esso raggiunge. Se si fosse costretti a pensare l'universo infinito in estensione si avrebbe una seconda applicazione reale del nostro con-

(1) *Dühring*, luogo citato.

retto; ma rimanendo insolubile la questione se la natura sia o no infinita (1), non si è che l'applicazione di esso allo spazio puro. Ed ecco la dimostrazione che dà di questa il Dühring, colla quale egli stabilisce appunto la classica distinzione dell'infinito relativo dall'infinito assoluto. — La tangente di un angolo che differisce da 90° di una infinitamente piccola differenza, è come la rispettiva secante infinitamente grande. Ad ogni grado di rimpicciolimento della differenza risponde un grado di ingrandimento della tangente e della secante dell'angolo. Così il punto in cui le linee si tagliano si fa sempre più lontano; rimane però sempre dato un incontro reale delle linee fin che sia data una per quanto piccola divergenza da 90° . « Se si è invece una differenza uguale a zero ossia se non se ne è alcuna, non si è nemmeno più propriamente una secante nè una propria tangente. Entrambe le linee loro corrispondenti non si tagliano più. Nel caso dello zero o, ciò che sarebbe lo stesso, per la cosecante e la cotangente di 0° non esiste più alcuna grandezza, allo stesso modo che nello zero medesimo. Infatti la illimitatezza di una linea non è già una quantità della stessa; ella è invece l'assenza d'ogni determinazione quantitativa. In tal modo allo zero dall'una parte corrisponde dall'altra l'illimitato non quanto (das grössenlose Unbegrenzte).Il caso dell'infinitamente grande si distingue da quello dell'infinito assoluto per questo, che la possibilità (della illimitata estensibilità) non figura come per sè data, ma vien riferita alla nostra attività.

(1) Vedi sotto n. 5.

Di più quest'ultima possibilità vien sempre rappresentata come dipendente da un'altra, in modo che dall'infinito rimpicciolimento e dal grado di questo dipende l'infinito ingrandimento e rispettivo grado costantemente corrispondente (1) ».

4. Una distinzione simile a quella del Dühring è fatto in riguardo all'infinito il Cantor, seguito in ciò dal Wundt (2) e seguito pure, sebbene con qualche riserva, dal Lasswitz; ad essa fa però assolutamente difetto quella spiccata razionalità che è la caratteristica del pensiero filosofico del Dühring. Crede il Cantor che la serie dei numeri si lasci pensare non solo come compiutamente infinita, ma come compiuta totalità; egli stima che si lasci pensar radunato in un tutto ogni numero intero positivo (3). L'aver sconosciuto l'inapplicabilità del concetto di totalità al transfinito è la cagione dell'assurda nozione che s'è fatto il Cantor di questo. Infatti perciò à egli potuto credere che il transfinito possa trovarsi nel finito stesso quasi come suo sostrato, e servire così alla spiegazione del continuo e dei numeri irrazionali (4). Ma qui non si ferma il Cantor; chè anzi la vera originalità della sua dottrina vede egli nelle differenze essenziali da lui trovate nel campo stesso dell'infinito assoluto (5). Si tratta infatti per lui soprattutto dell'ampliamento o proseguimento della reale serie dei numeri interi

(1) *Dühring*, luogo citato, pagine 88-89.

(2) *Logik* II, 127-128 (1883).

(3) Cantor: *Grundlagen einer Mannichfaltigkeitslehre*, 1883, pag. 1-3; *Zur Lehre vom Transfiniten*, 1890, pag. 42, 43 e 45.

(4) *Grundlagen*, pag. 8, 30. *Zur Lehre* pag. 35.

(5) *Zur Lehre*, pag. 9; *Grundlagen*, pag. 13.

oltre l'infinito medesimo. Egli non ottiene solo un unico numero intero infinito, si bene una infinita serie di tali numeri come benissimo tra loro distinti. Vi sarebbero così infinite classi di numeri; la 1^a classe sarebbe la serie dei numeri finiti 1. 2. 3... v..., ad essa terrebbe dietro la 2^a classe composta di successivi numeri interi infiniti in ordine determinato; dopo la 2^a si verrebbe alla 3^a e alla 4^a classe e così all'infinito (1). In tal modo naturalmente l'*infinito propriamente detto* (das eigentliche Unendliche) non sarebbe ancora il *vero infinito* (das wahre Unendliche) o l'assoluto. Chè anzi il Cantor espressamente fa notare che in tal guisa non si arriverà mai a un limite ultimo, e neppure a una sia pur soltanto approssimativa comprensione dell'assoluto, il quale solo è un infinito non più oltre aumentabile. Con ciò il transfinito, quantunque determinato e maggiore d'ogni finito, avrebbe assurdamente comune col finito il carattere della illimitata aumentabilità (1). Il Cantor dà per esempio del transfinito la totalità dei numeri finiti, confessa però non darsi, o almeno pel nostro intelletto, una totalità dei numeri transfiniti, ossia l'assoluto o il vero infinito non poter venir concepito, quantunque necessariamente postulato. Qui dunque ritorna la difficoltà del problema, e questa volta il Cantor confessa di non saperla sciogliere. Con ciò dà egli stesso involontariamente la miglior critica della sua teoria dell'infinito. Il suo transfinito del resto non è in fondo altro che l'infinito dell'intelletto di Spinoza, come or ora vedremo.

(1) *Grundlagen*, pag. 3.

(2) Id. pag. 44; *Zur Lehre*, pag. 8, 33, 48.

Illusorie come la infinita totalità sono le altre proprietà che il Cantor crede dover attribuire ai suoi immaginari numeri della nuova serie al di là dell'infinito. Così il non esser questi più soggetti alla legge di commutazione (1) è una evidente assurdità che rivela una inesatta concezione dell'infinito assoluto. Questo infatti è indifferente in riguardo al più e al meno. Ad esso non si può nè aggiungere nè togliere, come quello che non si lascia originare per via di operazioni. Per poter ad esso aggiungere qualche cosa converrebbe pensarlo dato quale compiuta totalità. Ma è falso che l'infinito si lasci concepire in tal guisa; cosicchè invece di operare con esso si opera inavvedutamente con una quantità pur essa finita (2).

Il concetto formulato dal Dühring dell'infinito assoluto non è nella storia della filosofia e della matematica del tutto senza precedenti, per quanto la critica da lui fatta dell'infinitesimo possa assai più facilmente rannodarsi a quella del Locke e di Kant da una parte, e dall'altra a quella di Carnot, che non si lasci questa sua nuova distinzione rannodare a' suoi precedenti storici (3). Vera-

(1) Cantor: *Grundlagen*, 11, 14, 15.

(2) Vedi più sotto n. 7.

(3) Bradwardinus distingue nel suo trattato *De Continuo*, come espone il Cantor (*Geschichte d. Mathematik* II, 107-109), "zwei Unendlichkeiten, die kathetische und die synkathetische. Kathetisch oder einfach unendlich ist eine Grösse die kein Ende hat. Synkathetisch unendlich ist eine Grösse der gegenüber es eine endliche Grösse giebt und ein anderes grösseres Endliche, und wieder Eines grösser als jenes Grössere, und so ohne dass ein Letzes sich fände, welches den Abschluss bildete; auch dieses ist immer eine Grösse, aber nicht wenn es mit Grösserem verglichen wird. Man erkennt leicht dass das kathetisch Unendliche Bradwardinus das Ueberendliche oder Transfinite

mente l'infinito positivo di Descartes, di Bruno e di Spinoza è un concetto che tradisce un'origine quasi del tutto ancora scolastica. L'infinito inteso come attributo necessario dell'essere è una concezione affatto inscientifica comune ai tre citati filosofi, e mostra chiara la sua derivazione da altri concetti teologici; quantunque esso non avesse in Bruno questa sola origine (1).

unserer neuerer Philosophen ist, dem von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Grössen zukommt fehlt, während das synkathetisch Unendliche mit den Endlosen oder Infiniten übereinstimmt, welches aus der endlichen Grösse durch unbegrenztes Wachsen hervorgeht. „

(1) Il Bruno capovolge la dottrina di Aristotele: risolve arditamente e con grande acume il continuo ne' minimi onde liberarsi dalle contraddizioni svelate da Zenone, come farà poi anche ma meno felicemente Hume, e accetta l'infinito nel grande: gli atomi e la infinità del mondo. (V. *Aerotismus*, art. XLII, citato dal Tocco, Le opere latine di G. Bruno, p. 116: *De Minimo*, I, VI). Devesi però avvertire che il minimo è pel Bruno ancora una grandezza che ei pensa giustamente, come farà anche Hobbes, relativamente trascurabile nel calcolo; il progresso infinito nelle divisioni è solo una continua possibilità della mente, mai un'effettività. Egli non nega alla immaginazione (o alla *ratio*, a distinzione della *mens*) di poter ulteriormente suddividere il minimo all'infinito, „ dum non promere subiectae credat conformia rei. — Infinitae progressionis imaginationis seu mathesis natura non respondet neque ullus usus artificialis obsecundat. *De Min.* I, 6, 7, 8. Tuttavia anche alla matematica vorrebbe Bruno dare una base atomistica, facendo valere pel concetto del corpo matematico ciò che vale per quello del corpo fisico. In questo anzi non seppe Bruno liberarsi dalla influenza dell'aristotelismo, pel quale ciò che vale della materia doveva naturalmente valere dello spazio. Il suo strano tentativo ricorda l'antica dottrina delle linee indivisibili o atomiche di Senocrate, anch'essa stabilita per evitare le stesse contraddizioni del continuo messe in chiaro dalla critica degli Eleati. (V. nello scritto περί ἀτόμων γράμματα Apelt, *Beiträge z. Geschichte d. Griech. Philosoph.* dove ne è anche data la traduzione, pag. 271 e seg.) Della dottrina atomistica di Bruno riconosce giustamente il merito il Lasswitz (G. Bruno u. die Atomistik, *Vierteljahrsschrift f. wissenschaftl.*

Tuttavia alcune importanti considerazioni sono comuni al Cusano (1) e a quest'ultimo sulla natura dell'infinito ossia sull'esistenza di un unico infinito in riguardo al quale non possa esservi divisione possibile nè disuguaglianza se misurato immaginariamente da misure differenti (2). L'infinito assoluto considera poi Spinoza come dato nei noti due cerchi l'uno dei quali è dentro all'altro e che non si toccano nè sono concentrici, esempio ricavato da Cartesio (*Principii*, II, 33, 34, 35) e da Spinoza medesimo già illustrato nella esposizione dei principii cartesiani della filosofia. Ma come è impossibile che la materia mossa tra due cerchi possa realmente dividersi all'infinito, così è impossibile farsi un concetto di una infinità assoluta di disuguaglianze come effettuata dalla relazione di quelli. Poichè *data* questa infinità non è nè può essere; altrimenti la potremmo anche pensare effettuata in un qualunque segmento di linea da' suoi punti infiniti. Una tale infinità non può così che venir riferita alla facoltà della nostra mente quale suo fondamento; non può esser che un caso di infinita possibilità come lo è quello dell'infinitamente grande.

Philos. VIII, 33): " Bruno hat durch den erkenntnisstheoretischen Ausgangspunkt seiner Monadologie sich das bleibende Verdienst erworben, den Atombegriff klar und widerpruchlos dargestellt zu haben. So lange das Atom nur als Letzes der Theilung gilt, bleibt es immer fraglich, ob man auf ein solches Kommen müsse; erst die Einsicht, dass es ein Erforderniss des Erkennens ist ein Erstes der Zusammensetzung zu haben, macht den Atombegriff zu einem nothwendigen.

(1) Cusano, *Docta ignorantia*, I. 4, 5, 13, 14.

(2) Già Aristotele, abbiamo visto, aveva tenuto per inapplicabile ad ogni grandezza l'infinito attuale, ma perciò appunto ne aveva rifiutato il concetto.

Il caso dei due cerchi si lascia ricondurre a quello d'ogni grandezza continua. Ora l'esame del continuo non può per sè mai darci l'infinito assoluto; il continuo riceve i termini che noi segniamo in esso senza lasciarsi però mai esaurire da successive suddivisioni. Con ciò esso non ci dà che il campo di una regola d'operazioni infinite, rimanendo pur sempre finiti i risultati di queste. Che le parti del continuo non si lascino esprimere con alcun numero (nullo numero explicari possunt) significa solo che sarebbe contraddittorio pensare come raggiunto il risultato d'una operazione infinita ossia da ripetersi senza fine. Il continuo non ci dà insomma che l'infinito relativo. E così ciò che Spinoza distingueva dall'infinitamente grande non è in realtà l'infinito assoluto; esso è soltanto lo stesso infinito relativo nella direzione opposta del primo, ossia nella direzione del piccolo (1). Ammette inoltre Spinoza che l'infinito propriamente detto può esser suscettibile di più e di meno. Ma non è esso allora cangiato nel finito? (2) e non dice egli altrove (3) che

(1) Lo Spaventa, *Saggi critici*, p. 256-7, seguendo Hegel trovava la distinzione dello Spinoza dell'infinito della immaginazione da quello dell'intelletto veramente profonda, e ravvisava in questo ultimo fissato il vero concetto dell'infinito assoluto che trascende ogni determinazione. Infatti però, come s'è visto, esso non può rappresentare che lo stesso infinito della immaginazione.

(2) Vedi lettera XXIX. In complesso questa importante lettera parmi mostrare molta incertezza malgrado il tono suo dommatico e tanto sicuro. I due unici esempi che Spinoza porta dei molti che ei dice avrebbe potuto addurre dell'infinito dell'intelletto, non sono omogenei. La infinità dei moti che furono, e la infinità delle disuguaglianze dei due cerchi non cadono sotto uno stesso concetto. Lo stesso abbiamo notato del transfinito del Cantor, il quale dovrebbe del pari esprimere appunto e l'intervallo $(0.....1)$ come totalità infinita, e il complesso della serie dei numeri interi positivi.

(3) *Etica*, I, prop. XV.

è un assurdo che un infinito possa essere il doppio di un altro? A questo assurdo risultato arrivano tutti quelli che pensano potersi dare l'infinito nel finito medesimo.

Di Locke già s'è visto qual razionale concetto egli avesse dell'infinitamente piccolo e grande. Egli non seppe tuttavia considerare l'infinito altro che nella illimitata addibilità e divisibilità, per cui non intese l'infinito assoluto. Locke analizzò con una grande acutezza soltanto le funzioni dell'intelletto in riguardo all'infinito, non però il riscontro loro oggettivo. Infatti era questo per Locke ancora Dio, il quale oltre i confini raggiungibili dal nostro pensiero coll'illimitato progresso, riempiva tanto l'infinito del tempo che quello dello spazio (1). Ed è così che egli poteva pensare esser l'idea positiva di infinito troppo ampia per una capacità finita e angusta come la nostra (2).

Kant scioglie trionfalmente tutte le difficoltà che aveva incontrate Locke nell'esame dello spazio (3), e fissa l'idealità di questo; una idealità che se è conseguenza delle stesse ragioni che l'avevano fatta necessaria agli Eleati, è però, un significato e una giustificazione scientifica di gran lunga superiore. Ma quanto al concetto proprio di infinito egli non fa un passo oltre Locke. E neppure Hume era andato più oltre sulle tracce di quest'ultimo. E' non seppe anzi per il metodo suo empirico apprezzare la bella trattazione lockiana dell'infinito, in cui la funzione sintetica della mente trovava una così

(1) Locke: *Essay on Human Underst.*, pag. 134, 135.

(2) Id. pag. 152.

(3) Id. pag. 131, 135 e 154.

giusta e importante benchè non del tutto consapevole applicazione. Hume, senza esaminare particolarmente l'infinitamente grande, si volge in special modo a considerare l'infinito nel piccolo (1). Ciò che più, come già Bruno, imbarazza il grande scozzese è la considerazione della infinità nel continuo, ossia della infinita divisibilità, la quale egli non distingue dall'infinito esser diviso, ossia dalla infinita divisione effettuata (2). Il suo empirismo, confondendo il reale colla forma, lo porta a stabilire lo spazio come composto di punti visibili e sensibili (meno risolutamente però nella « Inquiry ») (3); e il tempo della somma dei minimi delle sensazioni. « Come può, si domanda egli, un infinito numero di infinitamente piccoli non dare una grandezza infinitamente grande? o, come può un tal numero esser compreso allo stesso modo in una data grandezza che in una doppia di quella? Come può passare il tempo da un punto all'altro per un numero infinito di parti reali successivamente esaurienti? Sono in conclusione le stesse contraddizioni svelate dapprima da Zenone. Questi aveva conchiuso col negare lo spazio e il moto; Hume invece accusa la ragione stessa senza dare soluzione alcuna definitiva (4). L'aver confuso la forma col reale, e il non aver più acutamente esaminate le funzioni sintetiche della mente sono la ragione della infruttuosità delle sue ricerche sull'infinito.

Locke è insomma l'unico tra' filosofi moderni, o al-

(1) *Treatise* pag. 26, 32, 39, 43.

(2) Id. pag. 26, 29; *Essays*, edizione World Library, pag. 378-79.

(3) *Essays*, pag. 379.

(4) Hume: *Essays*, pag. 380.

meno sino al Dühring, che segna un notevolissimo progresso nella razionalizzazione del concetto di infinito. D'altra parte tra' matematici, dopo le lunghe discussioni sulla natura dell'infinitesimo, si fa strada, è vero, con Carnot, e col Cauchy, in séguito, l'opinione della arbitrarietà del differenziale, ma riman pur sempre come sfondo oscuro l'infinito esatto, una sfinge che i matematici dichiarano spettare ai filosofi di interrogare. E con ciò la mente è ben lontana ancora dal trovarsi appagata. Con Gauss poi, e dietro a lui col Riemann e con lo Steiner e con tutti i geometri anti-euclidèi, la nebbia che avvolgeva l'infinito s'è fatta ancora più fitta, e rimarrà così quale indizio dello spirito mistico dell'epoca nostra, la quale non sente quel bisogno vivo e quell'amore della chiarezza che così grande aveva il secolo decimottavo (1).

(1) Nè i filosofi del nostro secolo sono certo fatti per confortarci della mistica incertezza dei matematici e sbugiardare così il notato carattere generale dello spirito del decimonono dicontra al secolo precedente. (V. più sotto di Hamilton e Spencer n. 8).

II.

5. Dove l'universo, come presso Democrito e gli Epicurei, o presso Bruno e Spinoza si stabilisce dommaticamente infinito, la filosofia non s'è ancor spogliata di tutti gli elementi puramente poetici. Col criticismo moderno la questione della reale estensione dell'universo si è fatta essenzialmente empirica. La illimitatezza della nostra concezione dello spazio non ci garantisce una infinità oggettiva materiale (1). Empiricamente non si lascia dimostrare nè la finitezza nè la infinità dell'universo;

(1) È chiaro che chi volesse supporre un riscontro materiale assolutamente completo della nostra concezione infinita dello spazio correrebbe dietro una chimera. La nostra rappresentazione dello spazio à la sua spiegazione nella costante unità della coscienza e nella sua libertà del porre e dell'oltrepassare continuamente il posto. Ora a questa funzione mentale non si deve attribuire senz'altro un significato oggettivo. Al contrario fa il Bruno infinito il mondo appunto perchè è infinito lo spazio, ritenendo che la materia stia allo spazio come questo a quella: " e se non v'ha differenza tra spazio e spazio, non c'è nessuna ragione che solo quel breve tratto occupato dal nostro sistema planetario sia pieno e tutto il resto dell'immenso spazio vuoto. „ Cfr. Schopenhauer (*Die Welt als Wille* ecc. I, 588). il quale commenta gli argomenti affatto incritici del Bruno e vorrebbe farli servire a dimostrare anche la infinità del tempo.

altro che il finito noi non possiamo raggiungere e non possiamo mai giudicare se altro non vi sia più oltre da raggiungere nella realtà; se essa stessa abbia o no dei limiti come gli à costantemente la nostra rappresentazione. L'infinito come tale non può diventar oggetto della nostra esperienza; ma se questa è per la sua natura limitata, non perciò dobbiamo pensar limitata la realtà inconscia. Il concetto nostro dell'universo sarebbe dunque sempre solo comparativo. Certo è però che praticamente l'universo sarà per noi costantemente finito, poichè altro che in limiti finiti non può venir da noi conosciuto.

Il principio della costanza della materia e della forza non basta, come crede il Riehl (1), a dimostrare la finitezza della massa dell'universo. Se la massa si fa infinita, dice egli, verrebbe a mancarle con ciò ogni determinazione quantitativa, il che è incompatibile col concetto stesso di massa. Ogni determinazione le mancherebbe però naturalmente se considerata solo nella sua trascendente totalità, non mai invece nel finito; nè d'altro che di masse finite può aver ad occuparsi la scienza. Il grande principio della costanza della materia e della forza, nota ancora il Riehl, diventerebbe una mera e inutile tautologia, data la infinità loro; non potendo evidentemente l'infinito venir nè aumentato nè sminuito. Neppur questo è giusto. Il principio in discorso sarebbe tautologico se stabilisse appunto la costanza della materia infinita come tale; non se, come esso fa, stabilisce quella del finito in essa datoci. Infatti la conservazione costante del finito

(1) Riehl, *Der philosoph. Kriticismus*, III, 303-305.

non è data analiticamente colla inalterabilità quantitativa dell'infinito, poichè come l'infinito non è toccato da addizione o sottrazione, così potrebbe, posta infinita la materia, il finito in essa assolutamente crearsi o annichilarsi senza contraddizione alcuna.

6. Mentre la estensione e la massa dell'universo sono presumibilmente finite, ma nessuna necessità apriorica od empirica ci sforza a pensarle piuttosto finite che infinite; in riguardo al tempo concorrono invece necessità dell'esperienza e della mente a farlo nel regresso assolutamente infinito. Il problema cosmologico del tempo non à tuttavia avuto sinora una soluzione definitiva. À il tempo reale mai avuto principio? Vi fu nell'universo o nell'essere un primo cambiamento? E se il tempo non à avuto principio, ed è nel passato infinito, come può senza contraddizione venir pensata cotesta sua infinità?

Che il cambiamento abbia una volta cominciato è, per il principio di causalità, impossibile ammettere. La causa di un cambiamento deve cercarsi a priori in un cambiamento anteriore e così via all'infinito. Un cambiamento assoluto è empiricamente impossibile e a priori inconcepibile. Vi sono nell'essere ultime ragioni dei processi, ma non ultime cause. In ogni punto del tempo è esistita la serie delle variazioni. Non che nel concetto di sostanza si trovi unita necessariamente coll'esistenza l'azione, come crede il Riehl (id. 309), e che non lasciandosi quindi disgiungere il fare dell'essere dalla sua esistenza, venga ad esser perciò inconcepibile la sostanza scompagnata dal cambiamento. Inconcepibile sarebbe solo una esistenza

vuota, ossia scompagnata dalla essenza; la forza potrebbe però concepirsi ovunque come in equilibrio stabile, e con ciò l'universo come privo di ogni mutamento.

Vi è una condizione del divenire che non entra mai come membro nella serie causale: è questa il fondamento ultimo d'ogni fenomeno, la ragione della loro possibilità. Un tal fondamento riman quindi come fuori del tempo ossia veramente eterno, senza origine nè fine. Non è così dei cangiamenti o degli stati momentanei dell'essere. Lo stato precedente a un dato momento nella serie molteplice dei cangiamenti, se fosse sempre esistito, non avrebbe mai prodotto un effetto che si origina solo nel tempo; anche quello deve dunque aver avuto una causa, e così all'infinito. Delle cause non ve ne può essere una che da sè inizi assolutamente una serie; ogni causa di cangiamento è essa stessa un cangiamento, e suppone con ciò un'altra causa, un altro stato che la spieghi; tutto è sequenza nella serie, e un principio assoluto è un assurdo. Una prima causa del cangiamento per cui avvenga qualcosa che anteriormente non era, non è in alcun modo a connettersi coll'esperienza. La fine della primitiva quiete nell'essere senza una causa che la faccia cessare è un pensiero irrealizzabile; esprimerebbe una spontaneità incomprendibile, anche formalmente, che noi non possiamo accettare senza derogare alle leggi della conoscenza e della natura. Come la legge della causalità non conduce fuori della causalità empirica (al tradizionale Dio o Assoluto), così non conduce fuori del cangiamento.

Esenti da mutazione rimangono soltanto la sostanza e le sue qualità originarie, ossia in generale gli elementi,

per cui solo son possibili le variazioni. La causalità è applicabile unicamente ai cangiamenti, di modo che causa di un cangiamento non può mai esser che un altro cangiamento, non una cosa come tale. È quindi unicamente l'identico che sta a base del vario fenomenico che non à nè causa nè ragione, se non quella almeno che con lo Schopenhauer potremmo chiamare la ragione dell'essere, o di identità: la medesimezza con sè stesso è infatti la ragione della sua eterna esistenza. Dove non c'è variazione non c'è causa da ricercare; poichè causa non è che la ragion reale del cangiamento. Una variazione che non procedesse in base a qualcosa di stabile è un assurdo. Degli elementi non si dà quindi nè generazione nè corruzione alcuna. L'essere non è mai causa; le cause che la scienza rintraccia sono cangiamenti, e le leggi sono la uniformità e costanza del loro succedersi. Tanto l'essere universale quanto la materia e la forza sono fuori della catena causale: non sono per sè causa, si bene la ragione della connessione stessa causale. E così l'essere non si può porre quale ultimo anello della causalità; tanto il più remoto fenomeno immaginabile quanto il presente presupponendo l'essere, il fare dell'essere.

Un sistema dinamico non può mai per sè stesso originarsi da un sistema statico, come nemmeno può a questo passare. Sempre le forze si son misurate a vicenda, ed elementi di esse si son fatti equilibrio ed altri anno prodotto dei cangiamenti col lavoro meccanico; ed equilibrio e lavoro sono sempre stati necessari da una parte per conservare i cangiamenti lenti concretatisi, ossia in generale le forme durevoli, e d'altra parte per alimentare

la vicissitudine o la vita nell'essere. Il voler dunque trovare un principio della mutazione sarebbe lo stesso che credere che la materia una volta non sia esistita. Il sorgere della coscienza a un dato momento nell'universo, che il momento innanzi noi possiamo immaginare come affatto privo di vita conscia, non è una creazione assoluta, nè rappresenta una infrazione alle nostre leggi della conoscenza. Perchè quell'apparizione della vita conscia noi non l'abbiamo a pensare che come una combinazione di elementi, nè di elementi v'è creazione, poichè essi esistono eterni. Pensare la combinazione come occasionata dallo svolgersi delle variazioni non è nulla di sovranaturale. Certo la coscienza nella sua natura generale non è causa; ad essa come agli elementi ultimi d'ogni realtà è applicabile soltanto ciò che s'è detta la ragione dell'essere. Altra è però la questione della sua fenomenologia. In questa come nella fenomenologia generale la causalità è il suo regno. Se la coscienza al pensiero si presenta come originata dal nulla, gli è perchè le sue cause, nella loro natura oggettiva materiale, non possono in essa evidentemente comparire. Gli elementi di coscienza, o meglio le disposizioni alla coscienza nella realtà inconscia sono ora come latenti o neutralizzate: una data combinazione materiale ecco ne suscita la luce subitanea.

Il sorgere del cangiamento in generale implicherebbe invece una derogazione alla legge fondamentale della mente; noi non lo possiamo in modo alcuno concepire, e la realtà empirica ci costringe ad ammettere il contrario. Il variabile non è per sè stesso intelligibile senza un identico a sostrato. La identità dell'io come dà ori-

gine alla ragione logica così la dà a quella del cangiamento reale. Le differenze come tali non possono farsi contenuto della coscienza; per esserlo anno a venir riferite a una totalità identica. Ammesso che cangiamenti potessero avvenire senza conseguire ad altri, verrebbe a mancare la connessione dei fenomeni secondo leggi costanti; il concetto di natura perderebbe la sua unità e la scienza con ciò ogni fondamento. Le leggi del pensiero si incontrano invece con quelle della realtà. È chiaro che come la mente è la condizione inevitabile della esperienza, e con ciò del nostro mondo fenomenico, così le sue leggi o funzioni generali devono anche di quello esser leggi a priori, o assolutamente valide indipendentemente da ogni esperienza. Ciò non toglie tuttavia che coteste leggi possano venir trovate, come vengono in realtà, consone alla natura propria delle cose, ossia non imposte loro direi quasi arbitrariamente, perchè nelle cose sono le stesse leggi quantunque impensate. Che anzi in riguardo al fatto dell'esperienza, in riguardo alla unità sistematica della scienza e dell'essere, potrà trovarsi necessario di veder nelle leggi che la coscienza applica a priori alle cose null'altro che un riverbero o meglio null'altro che l'espressione soggettiva delle determinazioni autonome della stessa realtà inconscia.

Ponendo un principio del tempo reale e con ciò un cominciamento delle causalità non si sfugge d'altronde alla domanda: e perchè non prima? Se il primo cangiamento non ebbe causa, o perchè è esso avvenuto solo, mettiamo, parecchi quadrilioni di secoli fa? È vero che non si ammette una causa che l'abbia chiamato all'esistenza, ma

nemmanco si dice che qualche cosa l'abbia impedito di nascere prima. Per questo, per quanto lo si allontani dal presente, esso riesce sempre troppo vicino. Richiamarsi alla originarietà dell'essere come fa il Dühring (1), alla sua effettività indipendente da ogni pensiero e da ogni ragione, richiamarsi alla natura della realtà inconscia, cui il pensiero non può mai ricevere completamente in sè stesso, mai fondare in senso assoluto, ma soltanto ammettere come fatto, non è permesso quando intanto alla stessa effettività della natura impensata dell'essere evidentemente si contraddice. Si contraddice, dico, poichè, lasciando da parte l'analogia del pensiero che ammesso il cambiamento non sa vedere come esso possa originarsi in modo assoluto, noi non abbiamo in realtà conoscenza alcuna di un cambiamento cui un altro non preceda. Ogni cambiamento che apparentemente si presenta come tale — il nuovo nell'evoluzione — noi lo riduciamo è vero alle forze o forme, agli elementi costanti dell'essere de' quali non c'è ragione a domandare; ma il perchè della loro manifestazione appunto in un tale momento e non in altro, è nell'ininterrotto cambiamento collaterale, occasionale e in rapporto a quello. Ben possiamo invece richiamarci noi alla assoluta autonomia della realtà, che nulla ammettiamo contro il suo reale manifestarsi, quando diciamo che in senso assoluto non c'è una ragione del perchè quest'oggi, poniamo, sia proprio ora e non sia già stato in passato o non abbia piuttosto a venire in futuro, che v'è tanto poco ragione di questo suo essere

(1) *Logik. u. Wissenschaftstheorie*, p. 191.

presente che della esistenza stessa universale: dacchè come questa non à mai avuta fuori di sè la ragione del suo essere, così nemmeno il suo fare, il suo divenire interno.

In qualunque punto del tempo noi fissiamo l'essere, non lo troviamo mai privo di determinazioni, perchè queste sono autonome; e dal suo stato in dato momento dipende ogni sua ulteriore evoluzione; come però non c'è un momento in cui l'essere non sia, nemmeno ve n'è uno in cui esso non abbia un suo stato determinato. È così che del divenire v'è sempre la ragione in un divenire anteriore, ma del divenire in senso assoluto, v'è tanto poco un perchè quanto dei suoi durevoli elementi. In ciò che esiste è la ragione di ciò che esisterà; in ciò che à esistito la ragione di ciò che esiste. Nella originaria nebulosa è la ragione dell'attuale disposizione del sistema nostro solare, ed in altri processi cosmici ebbe essa stessa la sua origine, i quali se la scienza non può oggi rintracciare, non è però assolutamente impossibile che un giorno ella trovi, e che ad ogni modo sono necessariamente avvenuti.

7. Il cambiamento non à dunque avuto principio. Ed ecco appunto dove sorgono specialmente gravi, e a molti filosofi son parse insormontabili, le difficoltà del problema cosmologico del tempo. Si è sempre trovato (1), e

(1) Cusanus, *Opera*, Complementum theologicum, cap. 8, p. 1113: « Si enim numerare possumus decem revolutiones praeteritas, et centum, et mille, et omnes; si quis dixerit non omnes esse numerabiles, sed praeteriisse infinitas, et dixerit unam futuram revolutionem in futuro anno, essent igitur tunc infinitae et una, quod est impossibile. » — Bacone, *Novum Organum*, ediz. Fellow, p. 224. Lib. I, 48: « Ne-

Kant è il filosofo che più vi à attira'o l'attenzione, che ponendo la mancanza d'ogni principio nella serie regressiva delle cause, si viene conseguentemente ad ammettere che un'infinità di cause si sia esaurita, una infinità di cangiamenti sia realmente *tutta* trascorsa, il che contraddice al concetto di infinito, ed è quindi assurdo accettare. Non solo Kant, ma anche, tra gli altri, il più acuto forse dei filosofi post-kantiani, il Dühring (1) à trovato qui una insuperabile contraddizione, ed è stato da essa spinto a stabilire che il cangiamento nel mondo abbia ad un dato punto così casualmente senza ragione alcuna avuto un assoluto principio nell'essere, cosa evi-

que cogitari potest quomodo «eternitas defluxerit ad hunc diem; cum distinctio illa, quae recipi consuevit, quod sit infinitum a parte ante et a parte post, nullo modo constare possit; quia inde sequeretur quod sit unum infinitum alio infinito maius, atque ut consumetur infinitum et vergat ad finitum. » — Hobbes, il quale dichiara insolubile la questione dell' infinito in riguardo al problema cosmologico, ammette tuttavia cautamente la infinità del tempo nel passato e non si lascia ritenere dalla contraddizione di un infinito maggiore di un altro che sarebbe data dalla relazione dell'infinito passato a momenti diversi della serie temporale. Non sa però pensar l'infinito assoluto in modo razionale poichè crede di vincere quella supposta contraddizione obbiettando: « similis demonstratio est si quis ex eo quod numerorum parium numerus sit infinitus, totidem esse concluderetur numeros pares quod sunt simpliciter numeri, id est pares et impares simul sumpti ». De corpore IV, c. XXVI, 1. — La impossibilità del « regressus in infinitum in causis efficientibus » era un principio riconosciuto della scolastica. È vero però che gli scolastici lo facevano ancor più che a dimostrare un principio del tempo, o, secondo loro, del mondo, servire a dimostrare (seguendo Aristotele nella sua dimostrazione del primo motore). La necessità di una prima causa assoluta, ossia ontologica. Cfr. il libro apocrifo II c. 2 della Metafisica di Aristotele, secondo il quale non solo la serie delle cause nel passato, ma anche quella del futuro sarebbe contraddittoria.

(1) *Cursus der Philosophie, Logik.* luoghi citati.

dentemente assurda, e tanto più per chi come lui è sur un terreno affatto critico e scientifico. Io trovo al contrario che la illimitatezza della serie regressiva dei cangiamenti si lascia senza contraddizione alcuna concepire infinita o, più propriamente, assolutamente infinita. Il Dühring, non à compreso come l'infinito assoluto possa attribuirsi anche a ciò che è per sè numerabile. E così alla infinità dei cangiamenti nel tempo ritroso, che è l'unico caso dove una tale applicazione sia necessaria, egli à fatto invece quella ingiustificata della sua manchevole legge del numero determinato.

La difficoltà da me superata sta in questo, cui nessuno, per quanto io mi sappia, à mai badato sin'ora (1): i cangiamenti infiniti di cui si discorre non involgono contraddizione perchè essi non sono nè furono mai dati come *totalità*, ossia come *complesso* di una serie infinita. Acciò la contraddizione esistesse, bisognerebbe che s'ammettesse tacitamente un principio del cangiamento. Di fatti altrimenti nell' assenza d' ogni principio come si può dire: ora, in questo momento si è esaurita una serie infinita di cangiamenti? Ma da quando dunque? Si pensa con un tratto indefinito di tempo di avvicinarsi di più all' infinito del passato (2), mentre in-

(1) Questa soluzione è già brevemente enunciata nella mia *Lettera filosofica a I. Simirenko*, Torino, Roux 1890, p. 15.

(2) Schopenhauer, *Parerga u. Paralipomena* 6^a ediz. I, 111: « Wenn ein erster Anfang nicht gewesen wäre, so könnte die jetzige reale Gegenwart nicht erst, jetzt seyn, sondern wäre schon längst gewesen, denn zwischen ihr und dem ersten Anfange müssen wir irgend einen, jedoch bestimmten und begränzten Zeitraum annehmen, der nun aber, wenn wir den Anfang läugnen, d. h. ihn ins Unendliche hinaufrücken, mit hinaufrückt », ecc. ecc.

vece noi ne rimanghiamo sempre alla medesima distanza. Qualunque punto del tempo si scelga, anche milioni di milioni di secoli addietro nel passato, noi siamo sempre tanto vicini lo stesso all'infinito di prima. Come noi per quanto risalghiamo addietro non possiamo esaurire l'infinito che fu, così non dobbiamo inavvertentemente ammettere che l'essere sia ne' suoi cangiamenti partito da un punto per quanto distante da noi. Poichè in realtà ogni e qualunque suo cangiamento ne à sempre avuti dietro a sè una stessa infinità di altri. Non è che l'essere avendo dovuto compiere i cangiamenti in senso inverso di quello che noi tenghiamo nell'abbracciarli venga con ciò ad aver esaurito una infinità di variazioni. Il tempo nella sua durata bisogna considerarlo analogamente a una retta che in una direzione è assolutamente infinita e nell'altra in ogni momento terminata, ma prolungabile a piacere all'infinito. Come non implica contraddizione far terminare a un punto una linea assolutamente infinita, così non la implica il passato assolutamente infinito che si termina nel presente e può prolungarsi senza limite nel futuro.

L'errore di Kant e del Dühring e di tanti altri sta nel credere che posta la serie regressiva infinita si abbia con ciò una totalità infinita. L'infinito passato invece non è nè può essere un tutto, e non ammette quindi alcuna determinazione numerica, pur contenendo in sè ogni numero. Tale infinità non involge, come crede il Dühring, l'assurdo di una *contata* (o *percorsa*, come direbbe Kant) serie infinita (den Widerspruch einer abgezählten unendlicher Zahlenreihe); in qual modo potrebbe una tal se-

rie esser contata? Non s'accorge il Dühring che con ciò egli ammette già quello che ei vorrebbe dimostrare, ossia un principio del tempo reale? In verità è quella serie non contata, ma *innumerata* e *innumerabile*, ciò che detto di un infinito non inchiude punto contraddizione. Il moto non à principio nel tempo, e: sino a un punto qualunque del tempo è trascorsa una infinita serie di cangiamenti — non si equivalgono esattamente. Con *è trascorsa* si vorrebbe tacitamente porre come dato ciò che è impossibile a darsi. Di fatti la contraddizione scompare subito che si dice: la serie dei cangiamenti nel passato è infinita. *È trascorsa* sembra rinchiudere l'idea di un punto iniziale della serie, dove che i cangiamenti non si possono considerare un *tutto* o come serie completa senza contraddire al concetto di ogni assenzadi principio. Una infinità di cangiamenti, una infinità di momenti del tempo non è trascorsa, sibbene l'infinito trascorre sempre, e in ogni momento è esistita la serie dei processi. La successione perpetua è appunto la forma della infinità del tempo. Se si dice che l'infinito è trascorso si scambia, a parlar esattamente, il suo concetto, ponendo in vece sua quello del finito, o almeno si combinano insieme due concetti incongruenti. Poichè ammettendo che una infinità di movimenti è trascorsa o s'è esaurita nel passato, noi raduniamo in un *tutto* ciò che per sua natura non può mai venir radunato. Il concetto di infinito e quello di totalità sono incommensurabili. Una totalità è sempre raggiungibile con una sintesi successiva delle sue parti, non così l'infinito. Diciamo invece: le serie dei cangiamenti del passato è infinita — quale

contraddizione nel pensare che ogni cangiamento avvenuto è stato preceduto da un altro? Dov'è qui l'assurdo di un tutto infinito che avrebbe dietro a sè ogni momento del tempo? I fenomeni per sè non suppongono se non i fenomeni che immediatamente li precedono; e come non c'è qui contraddizione, così per quanto noi ci trasportiamo addietro nel tempo, mai la troveremo. (1)

Come à fatto il tempo reale a giungere all'ora presente dall'infinito? È potuto giungere dall'infinito perchè non è mai partito. Se fosse a un dato punto partito non sarebbe potuto giungere. È tanto concepibile l'infinito verso il quale tende la serie che quello dal quale essa procede; nell'un caso e nell'altro si deve solo avvertire di non fare un insieme o un complesso di ciò che non è mai dato come tale, ossia un insieme in cui ogni momento dell'infinito fosse anticipatamente compreso. Kant nell'antinomia (2) spiega dapprima egli stesso che l'infinità di una serie consiste nel non poter questa venir mai compiuta per mezzo di una sintesi successiva e che il concetto di fatalità non è altro che la rappre-

(1) Lo Schopenhauer à creduto di sciogliere il sofisma Kantiano con un altro sofisma, distinguendo tra assenza di principio e infinità del tempo. Egli così infatti obbietta alla tesi della 1ª antinomia: « Uebrigens besteht das Sophisma darin, dass statt der Anfangslosigkeit der Reihe der Zustände, wovon zuerst die Rede, plötzlich die Endlosigkeit (Unendlichkeit) derselben untergeschoben und nun bewiesen wird, was Niemand bezweifelt, dass dieser das Vollendetsein logisch widerspreche und dennoch jede Gegenwart das Ende der Vergangenheit sei. Das Ende einer anfangslosen Reihe lässt sich aber immer denken, ohne ihrer Anfangslosigkeit Abbruch zu thun: wie sich auch umgekehrt der Anfang einer endlosen Reihe denken lässt. » Die Welt als Wille ecc. 6ª ediz. I, 586-87.

(2) *Kritik der reinen Vernunft*, ediz. Kirchmann p. 364, 366, 360.

sentazione della sintesi completa delle sue parti. Dunque anche secondo lui dovrebbe il concetto di totalità non esser applicabile ad una serie infinita. Tuttavia per dimostrare che le cose coesistenti non possono essere infinite, alla loro infinità sostituisce egli appunto il concetto contraddittorio di un *tutto infinito*; ed à bel giuoco nel rigettare quindi un tale assurdo. Ecco la sua dimostrazione: un *tutto infinito* per venir pensato tale dovrebbe lasciarsi esaurire per mezzo di una sintesi successiva; ma l'*infinito* non può mai venir così esaurito, dunque una totalità infinita di cose coesistenti non può considerarsi come data. Insomma dice Kant: una infinità non potrebbe venir numerata ossia non potrebbe esser finita, dunque non può esser data; vien rigettato l'infinito semplicemente perchè è altra cosa che il finito. — Non l'infinito per sè, solo l'infinito nel finito è realmente un assurdo, poichè come tale dovrebbe esser necessariamente dato tutto. Ogni insieme di cose deve perciò contenere soltanto un numero finito di elementi numerabili. Ma quanto al tempo non c'è ragione di negarne la infinità; numerabili sono i processi da un punto a un altro della serie, non la serie stessa in senso assoluto, perchè ella non è mai data come un tutto.

Nell'infinito assoluto o transfinito che è proprio del tempo, non abbiamo più veramente una grandezza ma l'assenza di essa, poichè è data la necessità della mancanza di un limite nel regresso, ed una tale mancanza è oggettivamente mallevata come nello schema spaziale della mente essa lo è soggettivamente. La ragione della infinità dello schema spaziale, come di quella della serie

dei numeri sta nel soggetto ; la infinità invece della serie causale à la sua ragione nell' oggetto o nella realtà estramentale. È appunto solo nell' infinito del tempo passato che si lascia necessariamente attuare un significato reale del transfinito. Poichè una simile illimitatezza assoluta è bensì anche dello spazio, ma soltanto dello spazio ideale o matematico, in quanto questo viene oggettivato e lo possibilità che realmente è solo nella funzione mentale vien naturalmente considerata come oggettiva e per sè esistente indipendentemente da noi. L' infinità del passato non à, come tale, determinazione alcuna quantitativa, non si lascia esprimere col numero ; in essa è invece ogni numero e può porsi ogni determinazione rimanendo ella assolutamente indeterminata. Così la distanza di due punti nel tempo, per quanto grande la si immagini, se si à riguardo alla sua relazione all' infinito del tempo anteriore, non significa nulla per questo appunto che l' infinito assoluto essendo propriamente la negazione di ogni grandezza nel grande non può venir posto in relazione con altre grandezze. La nostra fantasia non può correre che all' infinitamente grande del passato ; solo la mente ne intende la infinità assoluta. Della serie del tempo non possiamo ottenere una assurda totalità ; per padroneggiare quella bisogna uscire dal cangiamento e volgersi al fondamento della infinità temporale, ossia all' essere come presente in ogni momento e come fonte d' ogni possibile.

Meravigliarsi che la più grande grandezza immaginabile non sia più vicina all' infinito assoluto che la più piccola, è analogo al meravigliarsi che la più ampia co-

noscenza dei fenomeni non arrivi più vicino alla cosa in sè che la conoscenza più limitata. Qui come là si tratta di una differenza qualitativa che non si lascia esaurire per variazioni di quantità. L'apparente paradosso che con una comunque grande grandezza non s'è mai più vicini che con altra infinitamente minore al transfinito, riposa in questo, che le due grandezze vengono riferite a quello senza mantenere di esso il giusto concetto, ma considerandolo invece come una quantità determinata; nel qual caso sarebbe veramente un assurdo dire che da esso disti ugualmente un dato punto e un altro che fosse prima o dopo di questo. Come nel transfinito del passato non c'è assolutamente un termine, così esso non è raggiungibile in alcun modo; dunque tutte le grandezze sono per riguardo ad esso insignificanti. Parimenti è un assurdo credere di poter addizionare una unità al transfinito; si può solo addizionarla al finito. L'accrescimento esisterà pertanto in riguardo ad un segmento finito di retta, ma non in riguardo alla retta stessa nella sua infinità. In una retta infinita nelle due direzioni è indifferente il far la divisione più in un punto che in un altro da quello lontanissimo; le due rette risultanti sono sempre lo stesso transfinito e con ciò sempre uguali. Nella retta $\infty' \text{---} A \text{---} B \text{---} \infty$ $\infty'A = A\infty$ e $\infty'B$ ossia $(\infty'A + AB) = B\infty$ uguale cioè $(A\infty - AB)$. Si vede così contrariamente alla dottrina del Cantor (1)

(1) Dice il Cantor che: "Zu einer unendlichen Zahl, wenn sie als bestimmt und vollendet gedacht wird, sehr wohl eine endliche hinzugefügt und mit ihr vereinigt werden kann, ohne dass hierdurch eine Aufhebung der letzteren bewirkt wird; nur der umgekehrte Vorgang, die Hinzufügung einer unendlicher Zahl zu einer endlichen, wenn diese

che $\infty + 1$ ($\omega + 1$ secondo la sua notazione) non è maggiore di ω , nè $1 + \omega$ è differente da $\omega + 1$, essendo $\omega'A + AB = AB + \omega$. Non v'è infinito maggiore d'altro infinito: tanto sarebbe infinito il tempo ritroso se la serie dei cangiamenti fosse terminata migliaia di secoli fa, quanto se esso continui all'infinito a trascorrere ancora. Il passato si può misurare tanto a minuti che a secoli, e dirlo eguale, se fosse lecito così esprimersi, a numero infinito di minuti o a uno infinito di secoli; non pertanto sarebbe sempre lo stesso infinito nè più nè meno. E la ragione di ciò è che la quantità transfinita non è misurabile. La immensità supera ogni numero, come direbbe Spinoza.

Nella infinita serie delle cause è da pensarsi un numero di esse (se tale può chiamarsi), maggiore di ogni numero assegnabile; oltre ogni raggiungibile anello la natura ne offre costantemente altri ulteriori. Nella natura la contraddizione non può esistere; ella non effettua il passaggio che da un momento a un altro; e questo passaggio non può farsi attraverso l'infinito. Per quanto noi risalghiamo all'indietro nella serie causale, come non troviamo contraddizione pel pensiero, così non la troviamo nella realtà. Essa ci offre sempre e solo un

zuerst, gesetzt wird, bewirkt die Anhebung der letzteren, ohne dass eine Modification der ersteren eintritt. „(Grundlagen ecc. p. 11); e più oltre (p. 14): „Ist ω die erste Zahl der zweiten Zahlenklasse, so hat man: $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1 = (\omega + 1)$, wo $(\omega + 1)$ eine von ω durchaus verschiedene Zahl ist. Auf die Stellung des Endlichen kommt es also alles an. „ Una tale inapplicabilità della legge di commutazione ai numeri transfiniti dovrebbe pel Cantor servire inoltre a dimostrare come tali numeri debbano poter essere e pari e dispari insieme o anche nè pari nè dispari. (Id. p. 15).

dato cangiamento e la sua causa. Il fenomeno non richiede per la sua spiegazione la totalità della serie delle cause anteriori, si bene soltanto la causa immediatamente antecedente; e il principio di ragione domanda unicamente la immediata condizione e non una totalità di condizioni. In quanto la stessa richiesta si rivolge successivamente alla causa della causa e così via all'infinito, si viene a domandare costantemente una nuova condizione e questa è un nuovo membro della serie e niente di più. Al tempo è essenziale la posizione in atto di un solo momento.

Fatta astrazione dai cangiamenti, e supposto l'essere affatto immoto in una rigida stabilità assoluta, noi lo poniamo però sempre in qualunque punto del tempo ideale che noi fissiamo; la sua esistenza la poniamo così necessariamente infinita nel passato. Or come può nascere la contraddizione se noi in uno qualunque di questi punti pensiamo invece l'essere universale nel flusso del cangiamento? Assurda è la posizione di un tutto infinito, quale non può qui esser dato, poichè la successione perpetua è la forma dell'infinito del tempo; noi abbiamo qui una serie che in riguardo al nostro procedere a ritroso nel tempo da fenomeno a fenomeno è infinitamente grande, e per sè è transfinita come la tangente dell'angolo di 90° (1).

(1) Il Wundt è condotto a credere (*Philos., Studien* II, 520. Kant's kosmologischen Antinonien u. das Problem des Unendl.) che l'applicazione del concetto di transfinito non sia possibile nel problema cosmologico del tempo. Egli crede un tal concetto trascendente, che invece non è, e così gli viene a mancare un concetto che esprima la infinità oggettiva ossia l'eternità del processo della natura. Il concetto limite del

III.

8. Kant credette che la sua dottrina della idealità del tempo e dello spazio o della trascendentalità in generale, spiegasse la supposta antinomia del problema cosmologico, e rendesse con ciò inutile e vana la ricerca di una soluzione. Ma appartenga o no il tempo e lo spazio al reale in sè, riman sempre tuttavia la questione se questo, che Kant non può a meno di accettare, si abbia a pensare come fondamento di un mondo fenomenico finito ovvero di uno infinito. Non vale rispondere che la serie regressiva delle percezioni nostre non può essere realmente infinita perchè come tale impossibile, e neppure finita perchè nessun limite dei fenomeni può venir concepito come assoluto, e dichiarare con ciò insolubile la questione. Dacchè l'oggetto trascendentale condiziona realmente, come egli ammette (1) un determinato regresso empirico, per un esempio nell'ordine dei corpi celesti; doveva Kant pur ammettere che rimaneva sempre a ve-

regresso infinito (o a dir proprio infinitamente grande) non è già un concetto trascendente della creazione quale dovrebbe, secondo il Wundt, accettare ogni spiegazione filosofica della natura (v. Wundt, *Ueber das Kosmolog. Problem*, Vierteljahrszeitsch. I, 128); quel suo concetto limite null' altro è invece appunto che l'infinito assoluto del tempo oggettivo, in base al quale è possibile il nostro infinito (infinitamente grande) regresso. Il non aver considerato l'eternità del fare della natura, e specialmente il non aver badato che l'infinito regresso è in realtà per la natura un perpetuo progresso, il cui concetto non può venir altrimenti pensato che per via del transfinito, è stata la causa per cui il Wundt concepì il tempo passato sotto il concetto dell'infinitamente grande concordando in fondo col Kant, come il Lasswitz si trova in questo d'accordo con lui. (L. Ein Beitrag zum Kosmol. Prob. Viertel. I, 343).

(1) *Kritik der reinen Vernunft*, ediz. cit., 428.

dere se l'oggetto trascendentale determinasse un possibile regresso finito od infinito (1). Perchè se per lui tutti processi compiutisi da tempo remotissimo ad ora non significano altro che la possibilità dell'allungamento della catena dell'esperienza dalla percezione attuale indietro alle condizioni che la determinano nel tempo; pure egli, per ciò che s'è sopra citato, non può negare che il *possibile* regresso delle nostre percezioni secondo le soggettive leggi della mente, non supponga un regresso oggettivo determinato dalla realtà inconscia indipendentemente da ogni esperienza (2). Trasportati a indefinita distanza dal nostro sistema solare, avremmo noi sempre ancora nuove percezioni? E così, trasportati indefinitamente addietro nel tempo vedremmo noi necessariamente sempre nuovi cangiamenti? Poichè la nostra necessaria produzione dello schema dello spazio e del tempo, non potrebbe per sè far sì che noi avessimo nuove percezioni dove l'oggetto trascendentale non le condizionasse e si mostrasse con ciò finito. Lo spazio e il tempo ideali non sono per sè garanti di una corrispondente possibile percezione.

Non una necessità del nostro concetto a priori del tempo, ma il principio di causalità richiede la infinità della serie regressiva dei cangiamenti. Poichè non si può concludere la mancanza di un principio del tempo

(1) Cfr. Schopenhauer, *Parerga*, I, 112-113.

(2) "Die wicklichen Dinge der vergangenen Zeit *sind in dem transcendentalen Gegenstand der Erfahrung gegeben*; sie sind aber für mich nur Gegenstände und in der vergangenen Zeit wicklich, sofern als ich ecc." (Id. p. 410). — Saranno però dunque sempre non null'altro, come dice Kant poco sotto, ma qualcosa di più della possibilità dell'allungamento della catena dell'esperienza dalla presente percezione indietro alle condizioni che la determinano nel tempo.

da questo, che ogni limite è necessariamente da noi pensato come relativo. La relazione di termine e terminante è infinita come quella di soggetto e oggetto; perciò appunto vuota; essa nulla può aggiungere al contenuto reale cui viene applicata. Come il pensiero dell'essere impensato, che è la forma in cui comprendiamo il reale, nulla toglie alla realtà estramentale od in sè della cosa, allo stesso modo la relazione mentale di limite e limitante non può evidentemente mettere nella realtà il suo secondo termine se nella realtà non è dato. Questo secondo termine, il limitante, rimane, se si astrae da ogni altra considerazione, un puro complemento ideale (1).

9. Il Riehl non seppe neppur egli superare o sciogliere la falsa contraddizione che Kant e Dühring, per non dir che di loro, credettero inchiusa nella concezione di una serie regressiva infinita di cangiamenti. Visto che la contraddizione stava nel concetto di una infinità la quale quei filosofi avevano pensato necessariamente

(1) Il Hamilton il quale (*Lectures on Metaphysics*, lettura 38; *On logic* I, p. 101-104) segue Kant nelle antinomie, non giunge che a questo risultato, di pensare in riguardo all'infinito del tempo e dello spazio, che se la ragione non ci fa piegare necessariamente nè da una parte nè dall'altra, pure in realtà il tempo e lo spazio debban essere o finiti o infiniti. (Cfr. del resto l'acume (!) del Mill nella sua confutazione del Hamilton, *La philosophie de H.*, cap. VI, p. 99). Lo Spencer poi, che à fatto la sua più alta educazione filosofica presso del Hamilton appunto e del suo scolare Mansel, seguendo il maestro dichiara questioni insolubili tanto quella riguardanti l'infinità del tempo e dello spazio che quella della divisibilità della materia e altre ancora. Egli pensa, come è noto, che i concetti di spazio, di tempo, di moto, di materia e di forza si mostrino in ultima analisi inconcepibili e ci lascino sempre del pari nell'alternativa tra due opposte assurdità. Vedi cap. III, § 15-18 e cap. IV dei *First Principles*, la quale io stimo certo l'opera più infelice del filosofo inglese.

data come totalità, egli pensò di sfuggirla col negare la numerabilità o la reale distinzione e indipendenza numerica nella catena delle cause e delle variazioni (1). Numerabili, dice egli, sono le cose, non i processi. In quanto le cose sono od appaiono spazialmente divise, deve è vero valere ciò che il Dühring à formulato come legge del numero determinato; ma altrettanto, seguita il Riehl, è certo che quella presupposizione non vale per i processi temporali. Questi non sono, secondo lui, per sè stessi distinti numericamente: è solo per la nostra distinzione mentale che essi ottengono una tale determinatezza. Un argomento dunque che vale per il numero non può senz'altro venir applicato al tempo, poichè mancano in questo per sè considerato e non riferito allo spazio, degli effettivi processi indipendenti, separati l'uno dall'altro, o posti insomma come numerabili. Noi possiamo distinguere dei processi nel tempo soltanto in determinato numero finito, nessun processo è però indipendente

(1) Il Riehl (*Der philosophische Kriticismus*, II, 126) inclinava dapprima decisamente a porre col Dühring un principio del cangiamento. Soltanto nella 2ª parte del 2º tomo, uscita è vero quasi un decennio dopo, tormentato dalla necessità del principio di causalità cangiò opinione (quantunque non lo abbia fatto notare egli stesso esplicitamente); ma per uscire dalla presunta contraddizione dell' infinito regresso, pensò, al contrario di prima, i processi come assolutamente, e con ciò assurdamente continui. V. id. II, 124, 126, 184, 185, 258; cfr. III, 304, 307. Si vede del resto evidentemente che il Riehl oltre aver cangiato di parere, non è nemmeno ancor ora troppo certo della sua nuova teoria; poichè la tratta troppo brevemente e troppo alla larga, come se gli scottasse di dover render più minuto conto di ragioni che a lui stesso non possono parere troppo convincenti. Ciononostante l'opera sua e specialmente la seconda parte del secondo tomo è un lavoro filosofico non solo di grande valore, ma anche molto attraente, il che è una cosa assai rara.

e distinto da quello che immediatamente lo precede o segue. — Il Riehl, non sapendo come uscire dalla supposta contraddizione à dunque rinunciato a concetti di cui l'esatto pensiero scientifico non sa nè può fare a meno, senza che ciò del resto gli abbia giovato per la eliminazione della temuta assurdità come più innanzi vedremo.

La questione dell'infinito riguarda tanto il tempo che lo spazio. Solo si à sempre a distinguere tra l'esistenza loro ideale; cioè il loro schema mentale, e la loro esistenza reale. Non numerabile possiamo noi solo pensare lo spazio ideale, lo spazio o l'estensione materiale dobbiamo invece necessariamente porla numerabile; poichè estensione reale è coesistenza, e la continuità assoluta non può essere reale ma soltanto ideale; altrimenti essa inchioderebbe la contraddizione dell'infinito compiuto nel finito, chè senza parti è solo il continuo della rappresentazione. Porre la continuità assoluta come effettiva è non spiegar nulla e mettere il mistero nella realtà, rinunciando a comprenderla. L'irriducibile noi lo dobbiamo soltanto rilegare negli atomi sia dello spazio che del tempo reali. I tropi degli Eleati non valgono meno contro il continuo del tempo che contro quello dello spazio; non meno contro lo spazio percorso da un pendolo in una oscillazione, che contro il tempo in questa impiegato. In parti ultime non si può dividere il tempo nè lo spazio ideale, perchè essi nè sono composti nè si originano da una sintesi di parti, come in fatti non possono venire analiticamente scomposti in ultimi elementi semplici, e sono conseguentemente l'uno e l'altro divisibili all'infinito; ma non è così del tempo e dello spazio reali, dove la natura viene necessariamente all'atto.

Dice il Riehl che solo il nostro intelletto scompone l'accadere temporale in singoli processi, e che questi solo per ciò ci appaiono indipendenti, che partono da cose spaziali e si trasmettono ad altre cose nello spazio (id. III, 286, 287, 309). Un processo secondo lui può aver indipendenza solo perchè vien riferito alle cose nello spazio e non al tempo unicamente. Ma è naturale che tutti i processi siano nel mondo materiale (e non vengano soltanto da noi) schematizzati per dir così nello spazio, poichè essi non sono altro che cangiamenti della realtà spaziale, e unicamente i processi della coscienza in sè considerati possono venir riferiti al tempo come tale senza riguardo allo spazio. Difatti non pensa *ora* il Riehl che sia concepibile una materia assolutamente continua come lo spazio mentale, ossia non costituita da atomi? (v. id. III, 307; cfr. II, 278 e 284). Anche della materia allora si dovrebbe dire che gli elementi distinti solo la nostra mente li pone. Come può egli dunque affermare ripetutamente che soltanto la referenza dei processi temporali allo spazio ci faccia considerar questi come distinti e per sè numerabili? Voler negare la numerabilità nel tempo reale o ne' suoi processi dovrebbe al contrario anche secondo il Riehl esser lo stesso che negare nello spazio gli atomi o le cose ossia gli aggrupamenti durevoli degli atomi.

Ogni grandezza nella realtà à parti elementari, non esclusi i cangiamenti; un certo grado di cangiamento è una somma di successivi cangiamenti minimali. Ma il pensiero come per istinto sembra rifuggire dalla concezione dell'atomo o minimo temporale, perchè colla determinatezza scompare quel che di vago e di nebuloso

che altrimenti conserva la concezione del tempo, e per cui la mente non avverte o avverte assai meno la inintelligibilità di quello. Colla posizione dell'atomo o minimo, la natura non più oltre scrutabile del tempo si affaccia bruscamente all'intelletto. Il tempo come rappresentazione rimane naturalmente strettamente continuo pur essendo discreti i processi reali, chè la sua continuità assoluta ideale è una proprietà necessaria dipendente dalla natura della coscienza, la quale tra due processi per quanto infinitamente vicini interpola pur sempre la sua unità. Non c'è un minimo concettuale del tempo come c'è invece e si richiede il minimo reale. Un minimo nella rappresentazione del tempo sarebbe un punto inesteso, e considerarlo come elemento della durata tanto varrebbe quanto rendere impossibile il concetto di questa (1).

Non deve più urtarci l'accettar gli atomi, o meglio la concessione atomistica, per la materia, che accettarla in riguardo alla forza e al cangiamento. Non crediamo siano più intelligibili gli elementi materiali che quelli del divenire. La facoltà nostra mentale di pensare gli

(1) Lo Schopenhauer trattando nella "Quadruplici radice del principio di ragione", (p. 93-96) del tempo del cangiamento, mette in piena e con ciò stridentissima luce il concetto ch'egli à della continuità assoluta del tempo, quale egli trova acutamente espresso presso Aristotele. "Come tra due punti v'è ancor sempre una linea, dice egli, così tra due ora vi è ancor sempre del tempo. È questo il tempo del cangiamento; esso è come ogni tempo divisibile all'infinito e per conseguenza il cangiamento percorre in esso un numero infinito di gradi per i quali dal primo stato nasce a poco a poco il secondo." Egli conchiude con Aristotele dalla infinita divisibilità del tempo, che ogni contenuto di esso e con ciò ogni cangiamento, o il passaggio da uno stato all'altro deve essere infinitamente divisibile, e che dunque tutto ciò che diviene s'origina in fatti da punti infiniti.

atomi come ulteriormente divisibili vale per tutti e due gli ordini senza diminuire perciò la necessità che à la mente di ammetterli. Quel sentimento direi quasi di disagio che par darci questa necessità, non è in fondo che cagionato da quella nostra come ripugnanza a riconoscere che l'analisi mentale della realtà deve a un dato punto arrestarsi. La mente deve arrivare ed arriva, ad elementi i quali non sono più oltre scomponibili, altrimenti il reale potrebbe sciogliersi nel pensiero. La divisibilità ideale non porta con sè una reale divisione. Solo il tempo ideale può venir diviso a piacere all'infinito, e non à quindi elementi numerabili, ma il tempo reale col suo vario contenuto fenomenico è di sua natura numerabile; quantunque noi, come ci accade per gli atomi della materia, non arriviamo direttamente a' suoi elementi. Non meno delle cose o degli elementi delle cose sono anche i processi numericamente distinti. E se in astratto la grandezza non à divisione, essa non può tuttavia nella realtà venir esattamente concepita che come risultante di una immediata ripetizione numerica d'uno stesso identico. L'assenza di elementi reali è solo nel nostro pensiero che può astrarre da ogni divisione nel considerare una grandezza, ed è pienamente libero di dividerla o accrescerla all'infinito, allo stesso modo che esso procede co' numeri. Tanto la natura che il pensiero àno del resto la possibilità dell'infinito accrescere e interpolare; ma ne' loro prodotti non possono dare che il determinato: l'infinito si riferisce solo al loro operare, non al loro operato.

Il concetto del continuo assoluto applicato al tempo reale sarebbe del resto affatto inutile anche quando fosse

giustificato. Poichè empiricamente un tal continuo noi non lo incontreremmo mai. Il fatto che noi della sintesi della natura (come dice Dühring in qualche luogo della Dialettica), non abbiamo altro che rappresentazioni di effettività, non ci dà il diritto di fare delle possibilità del nostro pensiero la misura della realtà. Come in sè sia fatto il passaggio da un punto del tempo all'altro, non può venir inteso. Tanto varrebbe domandare perchè esiste il tempo o magari l'essere stesso nella sua effettiva natura. Voler ancora spiegare gli elementi del tempo è uno sconoscere la natura del pensiero; noi non li possiamo ridurre ad altro perchè il tempo non è un prodotto della mente, è condizione anzi dell'esperienza, e non à una natura puramente logica. Il passaggio è una determinazione della realtà che noi non possiamo che riflettere. Sarebbe lo stesso voler spiegare gli atomi della materia; noi non possiamo che ammetterli o riconoscerli; una pretesa spiegazione di essi è assurda poichè il pensiero non è tutta la realtà, ma vien confinato da qualcosa che se pò dare ad esso un contenuto formale, non può però dare il suo essere. Da un grado a un altro del cambiamento si fa il passaggio in quanto il cambiamento stesso ci si mostra come fatto compiuto. Noi non dobbiamo quindi illuderci col concetto misterioso del continuo assoluto di penetrare più addentro nel fare della natura, nel divenire dei fenomeni. Noi non possiamo mai altro che constatare gli avvenuti cambiamenti, null'altro possiamo. E così in realtà non conosciamo come il cambiamento, ma che il cambiamento s'è fatto.

Tornando ora alla soluzione del Riehl, nemmanco col

fare la serie dei cangiamenti assolutamente continua sfugge egli, secondo crede, alla temuta e presunta contraddizione dell'infinito compiuto od esaurito. E l'errore suo si fa più stridente e palese quando egli sostiene che la infinità del tempo si mostrerebbe esaurita se si dovesse pensare ad un suo fine nel futuro. Ei crede che solo in tal caso, per evitare la contraddizione, si dovrebbe ammettere un principio assoluto del tempo. E così fa dipendere, cosa enorme, la infinità del regresso dalla infinità del progresso nel futuro. Ma la fine del tempo non è invece punto contraddittoria. È questa una questione di natura empirica; e così secondo lui non dovrebbe esser allora inconcepibile e contraddittorio neppure un principio del tempo. Il tempo reale, ove fossero date le condizioni di un equilibrio universale, potrebbe finire ad ogni momento senza assurdità alcuna. Poiché ad ogni modo nella natura ogni fine non è della serie infinita ma dell'ultimo cangiamento. Del resto, sia pure, ammettiamo che i processi non siano per sé distinti e numerabili, ma siano invece assolutamente continui. Dice il Riehl che le oscillazioni di un pendolo sono senza dubbio determinate numericamente (id. III, 309). Ora come risponderebbe egli alla domanda — nè vi può in modo alcuno sfuggire — se si debba pensare che insieme sommate le oscillazioni dei pendoli che possono dall'eternità esser mai esistiti in infiniti mondi, possano venir compresi da un numero finito? E se no sotto quale concetto una tale somma o regola di somma dovrà venir pensata? — A ciò non à egli risposta.

E più ancora come risponderà il Riehl a quest'altra

domanda: *il numero delle terre dall'eternità ad ora nate e morte è egli infinito o finito?* Poichè qui manifestamente abbiamo delle esistenze separate, indipendenti, numerabili anche secondo lui. L'unica giusta risposta è che un tal numero è necessariamente infinito, o, propriamente, transfinito. Nel corso perpetuo del tempo non solo non è contraddittorio, sibbene è necessario che un infinito numero di corpi celesti (dato che le moderne teorie cosmiche siano, come pare, inevitabili) abbia gradatamente avuto nascita e morte. Con ciò come non vi fu un primo cambiamento, nemmeno vi fu una prima terra.

10. Il concetto dell'infinito assoluto o transfinito è applicabile solo alla serie regressiva dei cambiamenti, non alla progressiva. La natura di questa consistendo appunto nel crescere suo continuo verso il futuro non può cadere, se infinita, che sotto il concetto dell'infinitamente grande. Poichè in nessun punto immaginabile del futuro non si sarà compiuta, a partire da un punto qualunque del tempo precedente, una infinità assoluta di cambiamenti. E ciò che si avrà sarà solo la continua possibilità di sempre nuove mutazioni. La questione però se realmente nella natura dell'essere sia la disposizione a questo infinito futuro è affatto empirica, non essendoci, come s'è visto sopra, alcuna difficoltà che a priori ci impedisca di pensare possibile un termine d'ogni cambiamento in un qualunque momento avvenire. Il concetto del tempo per sè non ci dà alcuna soluzione; la questione è puramente di fatto. La soggettiva possibile anzi necessaria illimatezza dello schema spaziale non porta seco necessariamente un infinito riscontro nella esistenza ma-

teriale oggettiva; allo stesso modo neppure la illimitatezza del tempo ideale porta con sè quella del tempo reale ossia una serie infinita di reali cangiamenti. Essa non ci impedisce in modo alcuno di considerare come possibile un limite del mondo nel tempo. Se noi siamo sforzati di pensare ad un tempo vuoto non è però il pensiero di esso che gli dà un contenuto reale in ogni suo momento. Essendo che per sè stesso la vuota durata tanto è del reale come del nulla ; sebbene la durata non rimane mai nel nostro pensiero priva affatto di contenuto, in quanto la permanenza dell'essere, indipendentemente dallo svolgersi o no esso in fenomeni, non può mai mancare di farle riscontro. Ed è in questo una grandissima differenza tra la rappresentazione dello spazio e quella del tempo. Mentre a niun punto arbitrario del tempo viene a mancare il contenuto materiale, non così necessariamente ad ogni punto dello spazio. A parte i cangiamenti in cui l'universo si svolge è evidente che non può ad esso venir applicato il concetto di una determinata durata. Come esso è sempre quello che è, così il tempo non à a suo riguardo significato alcuno. In un qualunque momento inesteso del tempo l'essere è completo, è tutto ciò che è stato e tutto ciò che sarà. Se dunque nel futuro venisse realmente a mancare ogni mutazione nell'essere, questo potrebbe solo impropriamente venir considerato come nel tempo; la durata dal punto in cui il cangiamento sarebbe cessato à soltanto senso perchè noi la immaginiamo misurata da quella piena di cangiamenti della nostra coscienza.

Intanto la meccanica non ammette assolutamente la

possibilità del passaggio di un sistema da uno stato dinamico ad uno statico. E così il tempo futuro è indubbiamente infinito nel senso di una progressione senza fine (1). Tra le due infinità del passato e del futuro sta il momento presente, il quale inchiude la realtà eterna, la realtà che fu e che sarà. La pienezza dell'essere non ci sfugge come parrebbe a considerarlo nella infinita sua fenomenologia. L'essere è sempre tutto presente, non c'è elemento di cui possa dirsi che sia stato o che abbia a originarsi. Certamente l'interesse nostro va al suo svolgersi ne' cangiamenti per cui solo ci si svela la sua natura e per cui solo noi ci commoviamo e viviamo. Chè per la coscienza l'essere immoto in una rigida inerzia non avrebbe valore alcuno. Tuttavia la infinita possibilità del cangiamento è tutta nell'essere in un qualunque punto matematico del tempo. E così l'importanza del tempo finito non si perde di contro alla infinità passata e futura del processo: ogni momento del tempo ci dà l'essere *sub specie aeternitatis*, nè altra mai è stata la esistenza della realtà che quella del momento.

Solo in questa considerazione della permanenza eterna del reale possiamo noi comprenderne la infondata e infondabile natura sistematica. Lo sguardo alla incessante evoluzione può troppo facilmente far considerare le interne determinazioni dell'essere come transitorie. Che l'evoluzione sia tale quale noi l'andiamo scoprendo non è altrimenti a intendersi. Giova quindi, per la concezione universale dell'esistenza, oltre che aver

(1) Vedi anche le considerazioni del Meyer, *Mechanick der Wärme*, p. 309-312.

riguardo allo svolgimento di un sistema parziale nel tempo considerare gli altri sistemi parziali del cosmo nel loro coesistente diverso grado di svolgimento, per cui si lascia forse quasi pensare come in ogni momento attuata nello spazio la evoluzione temporale dei singoli mondi.

Nello spazio e nel tempo, da cosa a cosa, da processo a processo, per il filo della causalità materiale spiega l'essere la sua unità. Alla necessaria necessità logica risponde la effettiva unità materiale della esistenza. L'unità dello spazio e del tempo nella rappresentazione non basterebbero per sè a escludere una radicale disparità nel reale. Se lo spazio e il tempo fossero puramente forme ideali nascerebbe il problema del come la realtà non possa dare origine a duplicità di sorta. E la questione si scioglie solo in quanto si riconosce che l'unità stessa del reale è che crea quella dello spazio e del tempo. Le proprietà dello spazio sono esse stesse di natura meccanica, nè altrimenti potrebbero le leggi della natura esprimersi in relazioni di spazio; nelle necessità spaziali è la logica immanente delle forze della natura. Due spazi differenti sono un assurdo non solo avuto riguardo al pensiero, ma anche in riguardo alla oggettiva realtà materiale. Il pensiero per sè non trova alcun impedimento a riunire ogni spazio in uno spazio unico nel vuoto schema spaziale e non può trovar quindi ragione di considerarlo come disuniforme. Nella realtà poi la pluralità degli spazi vorrebbe dire pluralità di esseri. Ora una tale pluralità non solo non può mai venir oggetto del nostro pensiero e per noi non può quindi

assolutamente esistere, ma è dalla realtà smentita, perchè anche l'esperienza colla omogeneità universale della materia mostra esser l'essere uno. Le posizioni delle distanze nello spazio reale non sono che rapporti di forza; ogni elemento dell'esistenza materiale è quindi nello stesso unico spazio; non esistendo così elemento alcuno fuori d'ogni relazione cogli altri. Analogamente è del tempo reale; la sua unità suppone quella dello spazio materiale e dipende insieme dalla universalità del cambiamento. Per la natura radicalmente omogenea delle cose e per la temporalità d'ogni cambiamento è uno anche il tempo oggettivo.

È così che i principii meccanici si estendono presumibilmente e con sempre maggior certezza ad ogni massa dell'universo, a ogni sistema di stelle fisse e gruppo di sistemi. Poichè la base dell'esistenza è di natura meccanica. Solo la sensazione come tale o il campo della coscienza ne resta fuori e riceve dalla spiegazione meccanica una eterogenea sebbene costante e parallela illustrazione. L'unità dell'essere non à riscontro in una fantastica e contraddittoria unità cosciente universale; rifrange invece per dir così la sua unità in quella di molteplici coscienze individuali. L'unità oggettiva estralementale e la unità della coscienza: due abissi del pari inscrutabili ma rispondentisi. All'una e all'altra sta a base e direi quasi a tergo quella che noi non possiamo concepire che col concetto formale di ragione o di fondamento unitivo e subfenomenico dei due fatti. Non è meno inscrutabile l'una unità dell'altra, sebbene quella della coscienza implica per sè quella materiale oggettiva. Infatti che cosa

di meno oltre analizzabile dell'unità radicale che con la mutazione si appalesa esistere negli elementi dell'essere? Come spiegare la effettiva comunione delle sostanze, il fatto che lo stato di un atomo porti seco un dato altro stato di un altro? Queste riflessioni ci richiamano alla infondata originarietà delle cose, e alla natura per così dire superficiale della conoscenza e del pensiero. Quelli sono resti refrattari ad ogni ulteriore analisi; nè già per difetto del nostro strumento, ma per la necessaria natura stessa del conoscere, chè altrimenti la realtà dovrebbe cessare di esistere come distinta dal pensiero. La analisi è necessariamente de' limiti, i quali non hanno però bisogno d'esser limiti della conoscenza nel modo in cui falsamente per lo più vengono intesi, quasi indizi di limitatezza di contro a una sia pur solo logicamente possibile conoscenza superiore.

Come non è incondizionatamente applicabile al reale il principio di ragione, tanto meno lo sono altri concetti essenzialmente relativi quali quelli di grandezza e di scopo. Se l'universo è infinito, non è evidentemente per ciò stesso determinazione alcuna quantitativa; se finito è vero però che in relazione ad una sua parte esso è una grandezza determinata, sebbene nell'estensione variabile da un momento all'altro; e che possiamo quindi dirlo più piccolo di una grandezza posta mentalmente superiore alla sua; che anzi possiamo anche considerarlo infinitamente piccolo in relazione all'infinito assoluto dello spazio ideale. Ma in sè non si potrebbe dirlo propriamente nè grande nè piccolo, perchè fuori di esso non vi è nulla che possa darci una unità di misura. E del pari

è affatto relativo il concetto di durata e inapplicabile perciò in modo incondizionato all'essere. Questo non dura nè tanto nè poco; e la ragione di ciò è che esso non è nel tempo. Considerando però la serie dei cangiamenti, al contrario di quanto ci accade per lo spazio, lo schema ideale del tempo riceve necessariamente un contenuto reale perfettamente corrispondente. E sciogliendo la difficoltà che più che tale a molti filosofi è parsa sinora una stridente contraddizione, abbiamo visto che come per mezzo del tempo si fa possibile il cangiamento, il quale altrimenti sarebbe contraddittorio, così per il cangiamento trova una necessaria applicazione alla realtà oggettiva l'infinito assoluto o transfinito.

Berlino, novembre 1894.

MARIO NOVARO.

